Kombinatorika 2

Csikvári Péter

peter.csikvari@gmail.com

https://csikvarip.web.elte.hu//Combinatorics_2.html

Kezdés: 10:15.

Valószínűségi módszer

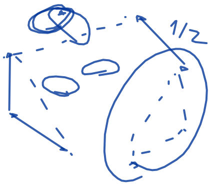
Ramsey-számok $R(p,k)$

Akárhogy színezzük K_N éleit kékkel és pirossal lesz vagy piros K_p vagy kék K_k.

$R(p,k)$ a legkisebb ilyen N.

Tétel: $R(k,k) \geq \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ ha $k \geq 3$.

Biz: Ha $\binom{N}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ akkor K_N-nek létezik jó színezése kékkel, pirossal monokromatikus K_k nélkül.



Rossz: $\exists\, S \quad |S| = k \quad S$ mono

B_S

$$\mathbb{P}(B_S) = \frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{|S|=k} B_S\Big) \le \sum_{|S|=k} \mathbb{P}(B_S) = \binom{N}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{jó színezés}) > 0$$

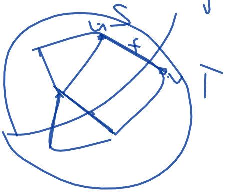
$N = 2^{k/2}$ ✓

$$\binom{N}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{N^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(2^{k/2})^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} \overset{k \ge 3}{<} 1.$$

D

Várható érték módszer

Áll: Minden G gráfnak van olyan vágása, ami legalább az élek felét tartalmazza.



Biz: Minden csúcsot $\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{2}$ vgel tegyünk S vagy T-be.

$$X = e(S,T)$$

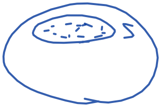
$$X_f = \begin{cases} 1 & \text{ha } f \text{ vágásban van} \\ 0 & \text{ha nem.} \end{cases} \Bigg\} \; X = \sum_{f \in E} X_f$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\Big(\sum_{f \in E} X_f\Big) = \sum_{f \in E} \mathbb{E}X_f = \sum_{f \in E} \mathbb{P}(f \text{ vágásban van}) = \sum \frac{1}{2} = \frac{|E|}{2}.$$

$\exists\, \omega : X(\omega) \geq \frac{|E|}{2}$. $\exists$ jó vágás.

D

$\alpha(G)$ legnagyobb független halmaz mérete egy G gráfban

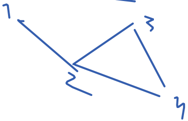


Tétel (Caro; Wei)

Legyen G gráf n csúcson $d_1, d_2, \dots, d_n$ fokszámokkal. Ekkor

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Biz: Vegyünk egy uniform random permutációját a G csúcsainak.



3 1 4 2

Karikázzunk be egy v csúcsot ha az adott sorrendben minden szomszédja mögötte van.

$v_3 \quad v_2 \quad v_4 \quad v_1 \quad v_5 \quad v_6$

$X(\pi)$ a bekarikázottak száma.

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{ha } v \text{ be van karikázva} \\ 0 & \text{ha nincs.} \end{cases}$$

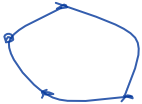
$$X = \sum_{v \in V} X_v \qquad \underline{\alpha(G)} \geq \mathbb{E}X = \mathbb{E}\Big(\sum_{v\in V} X_v\Big) = \sum_{v \in V} \mathbb{E}X_v = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$$

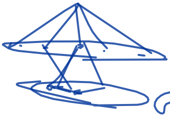
Észrevétel: bekarikázottak független halmazt alkotnak. (Ha két bekarikázott össze lenne kötve akkor a hátrébb levő a sorrendben tévesen lenne bekarikázva.) $\square$

Recski András

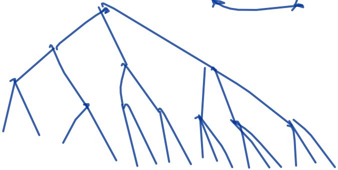
$\exists$ háromszögmentes gráf nagy kromatikus számmal.

Mycielski





G_k



Tétel (Erdős)

Tetszőleges k és l számokra létezik gráf, melynek $\chi(G) \geq k$ és a legrövidebb kör hossza legalább l.

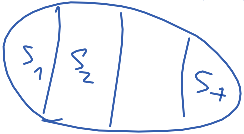
Biz:

$G(n, p)$ Erdős–Rényi random gráf.

p vszggel behúzunk élt.

$1-p$ vszggel nem.

$$\chi(G) \ge \frac{n}{\alpha(G)}$$

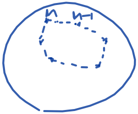


$$\underset{\alpha(G)}{\underset{\wedge\!|}{|S_1|}} + \underset{\alpha(G)}{\underset{\wedge\!|}{|S_2|}} + \dots + \underset{\alpha(G)}{\underset{\wedge\!|}{|S_t|}} = n$$

$$t\,\alpha(G) \ge n$$

$$t \ge \frac{n}{\alpha(G)}.$$

Rövid körök száma



$C(n,p)$

X_r r-hosszú körök száma

$$X = \sum_{r=3}^{\ell-1} X_r$$

$\le \ell-1$ hosszú körök száma.

$$\mathbb{E}X_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{2r}\,p^r$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\Big(\sum X_r\Big) = \sum_{r=3}^{\ell-1} \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{2r}\,p^r \le \sum_{r=3} \frac{(np)^r}{2r}$$

$$\mathbb{E}X \le \sum_{r=3}^{\ell-1} \frac{(np)^r}{2r} \le \sqrt{n} \sum_{r=3}^{\ell-1} \frac{1}{2r} \le \sqrt{n}\,\frac{1}{2}\log n < \frac{n}{4}$$

$\sum_{k=1}^{t} \frac{1}{k} \approx \log$

n elég nagy.

$$(np)^{\ell-1} \approx \sqrt{n} \qquad 0 < p = \frac{n^{\frac{1}{2(\ell-1)}}}{n} = n^{\frac{1}{2(\ell-1)}-1} < 1$$

$$\text{Ha } \mathbb{E}X \le \frac{n}{4} \implies \mathbb{P}\left(X \ge \frac{n}{2}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Független halmaz mérete.

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \ge t) = \mathbb{P}(\exists S \,.\, |S| = t \text{ és nem feszít élt.})$$

$$\le \sum_{|S|=t} \underbrace{\mathbb{P}(S \text{ nem feszít élt})}_{(1-p)^{\binom{t}{2}}}$$

$$= \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} \le n^t (1-p)^{\binom{t}{2}} \le n(1$$

t^{-1} ... p

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq t) \leq n^t (1-p)^{\binom{t}{2}} = \left(n(1-p)^{\frac{t-1}{2}}\right)^t$$

$$\leq \left(n(1-p)^{\frac{t}{3}}\right)^t$$

$$\boxed{1-p \leq e^{-p}}$$

$$1+x \leq e^x$$

$$\leq \left(n e^{-\frac{t}{3}p}\right)^t = \left(n \frac{1}{n^2}\right)^t = \left(\frac{1}{n}\right)^t \leq \frac{1}{n}$$

$$t = \left\lceil \frac{c}{p} \log n \right\rceil$$

$$e^{-\frac{t}{3}p} = e^{-\frac{c}{3}\log n} = \frac{1}{n^2}$$

$$e^p \leq \frac{1}{1-p}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$$

$$p = n^{\frac{1}{2(k-1)}-1}$$

$$t = \frac{6}{p}\log n = 6 n^{1-\frac{1}{2(k-1)}} \log n$$

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq t) \leq \frac{1}{n}$$

$$p = n^{\frac{1}{2(k-1)}-1}$$

$$t = \frac{6}{p}\log n = 6\, n^{1-\frac{1}{2(k-1)}} \log n$$

$$\mathbb{P}\left(X \ge \frac{n}{2}\right) \le \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(\alpha(G) \ge t) \le \frac{1}{4}$$

$\exists G$ $\quad X(G) \le \frac{n}{2} \quad \alpha(G) < t$.

legalább $\frac{1}{4}$ vgel

Minden rövid körből dobjunk ki egy csúcsot.

Kapunk egy G' gráfot. Nincs benne rövid kör.

$|V(G')| \ge \frac{n}{2}$. $\quad \alpha(G') \le \alpha(G) < t$

n elég nagy

$$\chi(G') \ge \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \ge \frac{n/2}{6n^{1-\frac{1}{2(k-1)}}\log n} = \frac{n^{1/(2(k-1))}}{12\log n} \ge k.$$

$\square$

Ramsey

Paley gráf

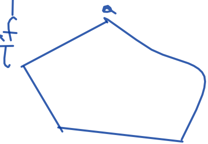
p prím

$4k+1$

$V(G) = \mathbb{Z}_p$

$a - b = \square$

$p = 5$



$p=5$ $\square$ $0, 1, 4$

$p = 17$

$K_4 \not\leq P_p$

$K_4 \leq \overline{P_p} \simeq P_p$

$R(4,4) = 18$

$$\boxed{\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}} < 1 \Rightarrow R(k,k) > n \Rightarrow R(k,k) \geq \frac{k}{\sqrt{2}e}(1+o(1))2^{k/2}$$

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \Rightarrow R(k,k) \geq \frac{k}{e}(1+o(1))2^{k/2}.$$

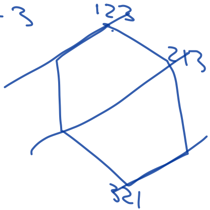
Károlyi Gyula

Permutaéder

$\mathbb{R}^n$ $(1,4,3,2)$ $\sum x_i = \sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$

Hány hipersíkkal lehet lefedni a permutaéder csúcsait $\mathbb{R}^{n-1}$-ben?

$n=3$



n

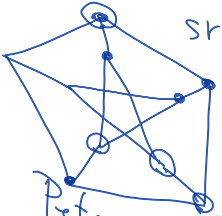
Páros n-re $n-1$

Páratlan n-re n

Erősen reguláris gráfok

<u>Def</u>: G (n, d, a, b) paraméterekkel erősen reguláris gráf ha n csúcsa van, d reguláris, két összekötött csúcsnak a darab közös szomszédja van, két összekötetlen csúcsnak pedig b darab közös szomszédja van.

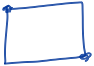
<u>Példa</u>:



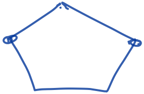
Petersen gráf

$srg(10, 3, 0, 1)$

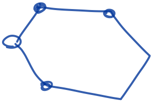
$(100, 22, 0, 8)$



$(4, 2, 0, 2)$



$(5, 2, 0, 1)$



$n \geq 6$ C_n nem erősen reguláris

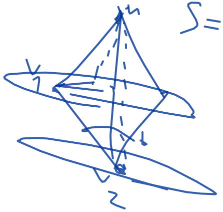
$(3, 2, 1, 17)$

K_n értelmetlen

Milyen (n,d,a,b) paraméterre van konstrukció?

Áll: G erősen reg (n,d,a,b) paraméterekkel akkor $d(d-1-a)=(n-d-1)b$.

Biz: Legyen u rögzített csúcs.



$$S=\{(v_1,v_2) \mid (u,v_1)\in E, (v_1,v_2)\in E, (u,v_2)\notin E\}$$

$$|S| = d(d-1-a) = (n-d-1)b$$

d: v_1

1: u

a: $\{u,v_1\}$ közös szomszédja.

d: nem u szomszédjai

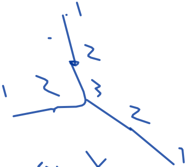
1: nem u

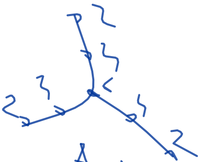
b: u és v_2 közös szomszédja.

Lineáris algebra

$$(A_G)_{uv} = \begin{cases} 1 & (u,v) \in E, \\ 0 & (u,v) \notin E. \end{cases}$$

$$(A_G \underline{x})_u = \sum_{v \in V} A_{uv} x_v = \sum_{v \in N_G(u)} x_v$$





$\underline{x}$

$2,\ 1^{(2)},\ 0,\ -1^{(2)},\ -2$

$A_G \underline{x} = 2\underline{x}$

A_G^2

$$\begin{array}{c|c}
 & j \\
\hline
k & \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 0 & \\ 1 & \\ \vdots & & A_G & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 1 & & A_G & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

közös szomszédok száma

Ha G erősen reguláris:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d & & a \\ & \ddots & \\ b & & d \end{pmatrix}$$

össze van kötve

nincs összekötve

$A_G^2 + (b-a)A_G =$
$$\begin{pmatrix} d & & b \\ & \ddots & \\ b & & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_G^2 + (b-a)A_G - (d-b)I = bJ}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_G^2 + (b-a)A_G - (d-b)I = bJ$$

$$A_G \underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad / \cdot \underline{x}$$

$$\lambda^2 \underline{x} + (b-a)\lambda \underline{x} - (d-b)\underline{x} = bJ\underline{x} = b\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^2 + (b-a)\lambda - (d-b))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \sum x_i \\ \vdots \\ \sum x_i \end{pmatrix}$$

Ha $\lambda^2 + (b-a)\lambda - (d-b) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{b}{\lambda^2 + (b-a)\lambda - (d-b)} \sum x_j$$

$$A_G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \underset{d\text{-reg.}}{\overset{\uparrow}{=}} d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha $\underline{x} \neq c\underline{1} \Rightarrow \lambda^2 + (b-a)\lambda - (d-b) = 0$. $\Rightarrow \lambda_{\pm} = \dfrac{a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}{2}$.

$d \quad , \quad \lambda_+ \quad , \quad \lambda_-$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1 \quad , \quad m_+ \quad m_-$

$$n = 1 + m_+ + m_- \qquad \text{sajátértékek száma}$$

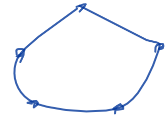
$$0 = \operatorname{Tr} A = d + m_+\lambda_+ + m_-\lambda_- .$$

$$m_{\pm} = \frac{1}{2}\left(n - 1 \mp \frac{2d + (n-1)(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + 4(d-b)}}\right).$$

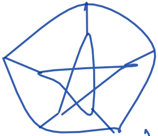
Petersen-gráf

$(10, 3, 0, 1) \longrightarrow 3^{(1)}, 1^{(5)}, -2^{(4)}$

Ha G "erősen reg" (n, d, a, b) akkor $m_{\pm}$ nemnegatív egész
"összefüggő"



$(5,2,0,1)$



$(10,3,0,1)$

Tétel (Hoffman–Singleton)

Ha G gráf erősen reguláris $(n,d,0,1)$ paraméterekkel, akkor $n=d^2+1$ és $d\in\{2,3,7,57\}$.

Hoffman Singleton

???

Biz:

$$d(d-1-a)=(n-d-1)b$$

$$d(d-1)=n-d-1$$

$$d^2+1=n$$

$$n=d^2+1,\ d,\ 0,\ 1$$

$$\lambda_\pm=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)^2+4(d-b)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{4d-3}}{2}$$

$$m_\pm=\frac{1}{2}\left(d^2\mp\frac{2d-d^2}{\sqrt{4d-3}}\right)\in\mathbb{Z}$$

$\sqrt{4d-3}$ racionális ha $2d-d^2\neq 0$. $\Longrightarrow d=2$ 

$$\Downarrow$$

$$4d-3=s^2 \qquad d=\frac{s^2+3}{4}. \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2\mp\frac{2\,\frac{s^2+3}{4}-\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2}{s}\right)$$

egész

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2 \mp \frac{2\,\frac{s^2+3}{4}-\left(\frac{s^2+3}{4}\right)^2}{s}\right) \quad \text{egész}$$

$$m_+ = \frac{s^5+s^4+6s^3-2s^2+9s-15}{32s}$$

$32m_+$ egész $\Longrightarrow s \mid 15$.

$$d = \frac{s^2+3}{4}$$

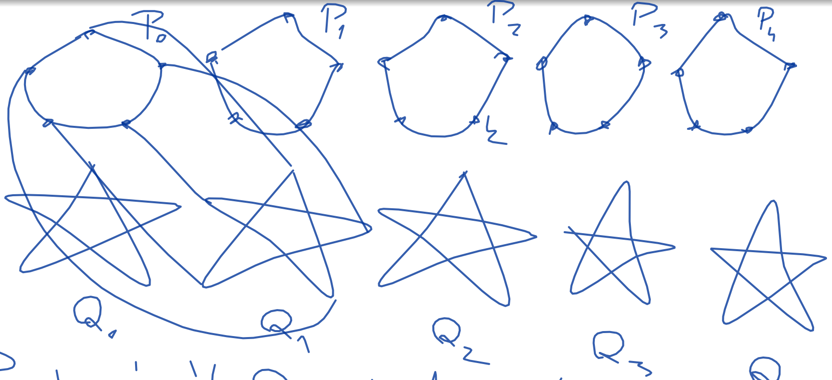
$s=1 \Longrightarrow d=1$

$s=3 \Longrightarrow d=3$

$s=5 \Longrightarrow d=7$

$s=15 \Longrightarrow d=57$.

$\square$



P_i k csúcsát Q_j-nek $k+ij \pmod 5$ csúcsával kössük össze.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(1, 2, 3) (1, 2, 4) . . . (5, 6, 7)

diszjunktak

$\binom{7}{3} = 35$

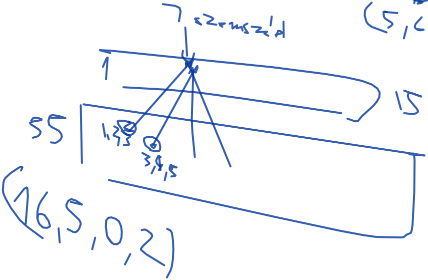
(1, 2, 3) (4, 5, 6)

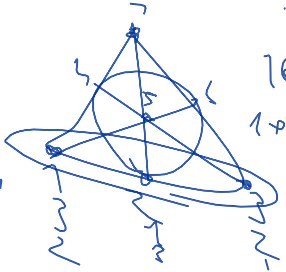
3

(1, 2, 3) (2, 3, 4)

(5, 6, 7)

(1 2 3) (3, 4, 5)



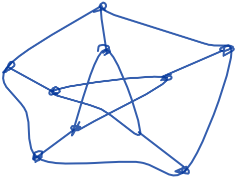


168

$\frac{7!}{168} = 30$

$1+7 \cdot 2 = 15$

Mese



K_{10} piros, kék, zöld

Tétel (Lossers–Schwenk)

$K_{10} \neq P + P + P$ vagyis K_{10} élhalmaza nem bontható fel 3 Petersen-gráf uniójára.

Biz: Indirekt. $(16,5,0,2)$ K_{16} $R(3,3,3) > 16$

$$J-I = A_{K_{16}} = A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3}$$

$$-\underline{x} = \underline{x} + \underline{x} + A_{P_3}\underline{x}$$

$\,/\underline{x}$

$$A_{P_3}\underline{x} = -3\underline{x}$$

de A_{P_3}-nak nem sajátértéke -3. ↯

$$A_{P_1}\underline{1} = A_{P_2}\underline{1} = A_{P_3}\underline{1} = 3\cdot\underline{1}$$

A_{P_1} $3,\ 1^{(5)},\ -2^{(4)}.$

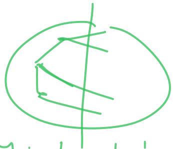
$$V_1 = \{\underline{x} \quad A_{P_1}\underline{x} = \underline{x}\} \qquad \dim V_1 = 5$$

$$V_2 = \{\underline{x} \quad A_{P_2}\underline{x} = \underline{x}\} \qquad \dim V_2 = 5$$

$V_1 \perp \underline{1}$, $V_2 \perp \underline{1}$.

$$\underset{5}{V_1} \cap \underset{5}{V_2} \le \underset{9}{\underline{1}^{\perp}} \Rightarrow \exists \underline{x} \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow J\underline{x} = \underline{0}.$$

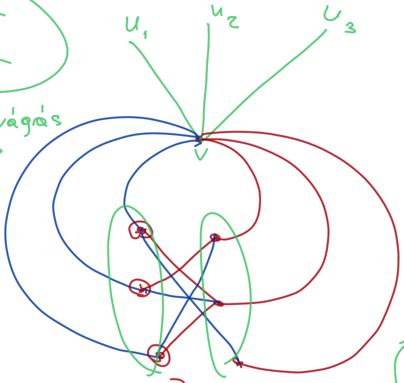
$\square$



Minden vágás páros

$\Updownarrow$

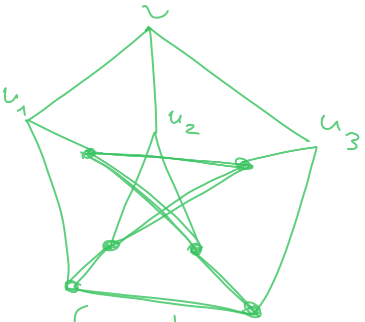
minden fokszám páros.



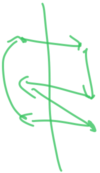
3 piros

3 kék

3 zöld



6 csúcs C_6-t feszít



Minden vágása páros sok élt tartalmaz.

Halmazrendszerek

Páratlanfalva.

Tétel. $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ melyekre $|S_i|$ páratlan $i = 1, \dots, m$-re, $|S_i \cap S_j|$ páros ha $i \neq j$.
Ekkor $m \leq n$.

Bizi:

$S_i \to v_i$ kar. vektor $v_i \in \mathbb{F}_2^n$ $\quad \{2,3,5\} \to (0,1,0,1,1,0,\dots)$

$$(v_i)_j = \begin{cases} 1 & j \in S_i, \\ 0 & j \notin S_i. \end{cases}$$

Áll: $v_1, v_2, \dots, v_m$ lineárisan függetlenek. $\to$ **Köv:** $m \leq n$, Tfh lin összefüggőek. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}_2$ nem mind 0, melyre

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_m \underline{v}_m = \underline{0} \qquad /(\ , v_i)$$

$$0 + 0 \quad + \lambda_i (v_i, v_i) \qquad (\underline{0}, \underline{v}_i)$$

$$(v_i, v_i) = \lambda_i \qquad (\underline{0}, \underline{v}_i) = 0$$

$(v_i, v_i) = |S_i| \pmod 2$

0, 1, 1, 0, 1, - - -

0, 1, 1, 0, 1, - - -

1, 0, 1, 0, 1, - - -

$(v_i, v_j) = |S_i \cap S_j| \pmod 2$

$\lambda_i = 0$ $\mathbb{F}_2$-ben.

Minden $\lambda_i = 0$ $\mathbb{F}_2$-ben. ↯

$\square$

$$m\left(\; T \; \begin{matrix} -\underline{v}_1- \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_m \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_m \end{matrix} \; T^t \right) \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & \dots & 1 \end{matrix} \right) \; m \times m$$

$$T T^t = I_m$$

$$\mathrm{rk}(T T^t) = \mathrm{rk}(I_m) = m$$

$$\mathrm{rk}(T) \geq \mathrm{rk}(T T^t)$$

Tétel (Általánosított Fisher egyenlőtlenség)

$A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ különböző halmazok
nem üresek
melyekre $|A_i \cap A_j| = t$ $\forall\, 1 \le i < j \le m$ esetén.
Ekkor $m \le n$.

Biz: 1. eset $\exists A_i$ $|A_i| = t$. Ekkor $|A_i \cap A_j| = t \Rightarrow A_i \subseteq A_j$.

$|\underset{A_i}{A_j \supseteq} \cap \underset{A_i}{A_{j'} \supseteq}| = t$ $\Rightarrow$ $A_j \setminus A_i$ és $A_{j'} \setminus A_i$ diszjunktak

$|A_j \setminus A_i| \ge 1$ $\quad [n] \setminus A_i$ diszj. részei $A_j \setminus A_i$

$(A_j)_j \le n-1 \Rightarrow m - 1 \le n - 1 \Rightarrow m \le n.$

2. eset: $\nexists A_i$ melyre $|A_i| = t$.

$A_i \to v_i$ kar. vektor $v_i \in \mathbb{R}^n$. $\{2,3,5\} \to (0,1,1,0,1,0)$

Áll: $v_1, v_2, \dots, v_m$ lin. független. (Köv: $m \le n$.)

Biz: Indirekt $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ nem mind 0.

$$\underline{0} = \lambda_1 \underline{v_1} + \dots + \lambda_m \underline{v_m}$$

$$0 = (\underline{0}, \underline{0}) = (\lambda_1 \underline{v_1} + \dots + \lambda_m \underline{v_m}, \lambda_1 \underline{v_1} + \dots + \lambda_m \underline{v_m})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |A_i| + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j \underset{\substack{\| \\ (v_i, v_j) \\ \| \\ |A_i \cap A_j|}}{t}$$

$$= t \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (|A_i| - t) \ge 0$$

≥ 0, $\quad |A_i| > t$, $\quad = 0 \; \forall \lambda_i = 0$

$\Rightarrow \forall \lambda_i = 0$ $\lightning$

$\mathrm{rk}(TT^T) = m$

$\mathrm{rk}(A) \le n$

$$T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$TT^T = \begin{pmatrix} |A_1| & t & \dots & t \\ t & |A_2| & & \\ t & & \ddots & \\ t & & & |A_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_1| - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A_n| - t \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(A) = 1$.

1. Tétel: Legyen $\mathcal{L} \subseteq \{0,1,2,\dots,n\}$. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq [n]$ úgy, hogy $|A_i| \notin \mathcal{L}$ ha $1 \le i \le m$, de $|A_i \cap A_j| \in \mathcal{L}$ ha $i \neq j$. Ha $|\mathcal{L}| = s$, akkor

$$m \le \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{0}.$$

Megj: $\mathcal{L} = \{0,1,2,\dots,s-1\}$ $\binom{[n]}{s} = \{A_1, \dots, A_m\}$ összes s elemű részhalmaz

$m = \binom{n}{s}$

közel éles.

2. Tétel: Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}_p$ legyenek $A_1, \dots, A_m \subseteq [n]$ úgy, hogy $|A_i| \bmod p$ nincs $\mathcal{L}$-ben, $|A_i \cap A_j|$ elemszáma mod p $\mathcal{L}$-ben van ha $i \neq j$. Ha $|\mathcal{L}| = s$, akkor

$$m \le \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{0}.$$

$\mathcal{F} = \{1, 4, 7, 10\}$

$n = 11$

$p = 3$ $\mathcal{L} = \{1$

Megj: Ha $p > n$ 2. tétel $\Rightarrow$ 1. tétel.

Biz:

$A_i \longrightarrow v_i \longrightarrow P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{t\in L} ((\underline{v_i}, \underline{x}) - t)$

kar. vektor

$(v_i, \underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} (v_i)_j x_j$

$\mathbb{F}_p$-det együtthatókkal

Áll: $P_1, P_2, \ldots, P_m$ lin. függetlenek $\mathbb{F}_p$ felett.

Biz: Tfh $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}_p$-ben, melyekre

$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_m P_m = 0$

(v_i behelyettesí

$P_i(v_j) =$ $i \neq j$

$P_i(v_j) = \prod_{t\in L} ((v_i, v_j) - t) = 0$

$(v_i, v_j) = |A_i \cap A_j| \in L$

$P_i(v_i) = \prod_{t\in L} (|A_i| - t) \neq 0.$

$|A_i| \notin L$

$\lambda_i P_i(v_i) = 0$, $P_i(v_i) \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ ↯

$x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \quad 0 \le j_i \le |\delta|$

$(s+1)^n$

Ötlet $P_i(x_1, \ldots, x_n)$-ben cseréljük le

x_i^k-t x_i-re ha $k \geq 1$.

$x_1^3 x_2^2 x_3^4 \longrightarrow x_1 x_2 x_3$

$P_i \rightarrow \hat{P}_i \qquad P_i(v_j) = \hat{P}_i(v_j) \qquad v_j$-ben csak 0-k, 1-k vannak.

$\Rightarrow \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_m$ lin. független

$1, x_1, \ldots, x_n, x_1 x_2, \ldots, x_{n-1} x_n, \ldots, \prod_{\substack{i \in S \\ |S| \le s}} x_i \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{s} \geq m. \ \square$

Tétel: $n = 4p-1$. Tfh $A_1, \dots, A_m \subseteq [n]$ olyan,

hogy $|A_i| = 2p-1$, $|A_i \cap A_j| \neq p-1$. Ekkor

$$m \le \binom{4p-1}{p-1} + \binom{4p-1}{p-2} + \dots + \binom{4p-1}{0} \le 1.8^n$$

ha n elég nagy.

Megj: $\binom{4p-1}{2p-1} \sim \frac{2^{4p-1}}{2\sqrt{4p-1}}$

Biz: $\mathcal{L} = \{0, 1, 2, \dots, p-2\}$

$|A_i| \bmod p \notin \mathcal{L}$

$|A_i \cap A_j| \bmod p \in \mathcal{L}$

$$\overset{\text{előző tétel}}{\Longrightarrow} m \le \binom{4p-1}{p-1} + \dots + \binom{4p-1}{0} < p \boxed{\binom{4p}{p}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

$k = \alpha n$

$$\sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{(\alpha n)^{\alpha n}((1-\alpha)n)^{(1-\alpha)n}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\boxed{\left(\frac{1}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\right)^n}$$

$$\binom{n}{k} \sim \text{sup exp} \left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \right)^n$$

$$\exp(n\, h(\alpha))$$

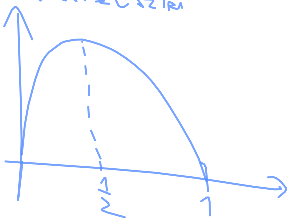
$$h(\alpha) = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha) \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

bináris entrópia fv.

$p = (p_1, \dots, p_k)$ val. eloszlás

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{1}{p_i}$$

$$H((\alpha, 1-\alpha)) = h(\alpha)$$



$p\binom{4p}{p} <$ subexp. $\exp\left(\underset{n+1}{\underbrace{4p}}\, h\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

$\exp\left(h\left(\frac{1}{4}\right)\right) < 1.8$

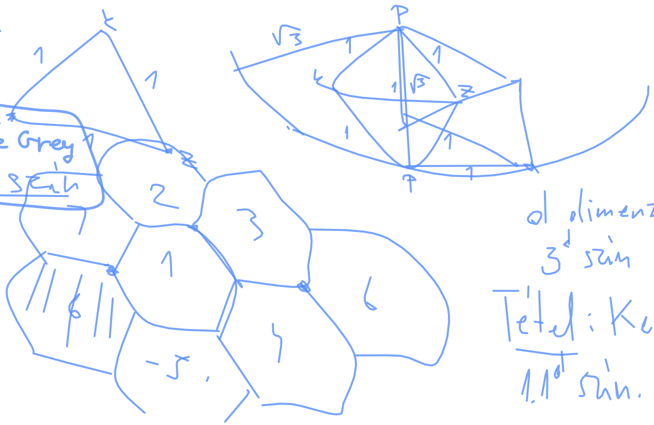
$\Longrightarrow p\binom{4p}{p} < 1.8^{4p-1}$ p elég nagy.

Megj: ha $k < \frac{n}{2}$.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{k} \leq \exp\left(n\, h\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$\mathbb{R}^d$ színezése úgy, hogy 1 távolságra levő pontok különböző színűek

$d = 2$



Aubrey de Grey
≥ 5 szín

7 szín elég.

d dimenzióban 3^d szín elég.

Tétel: Kell legalább 1.1^d szín.

Tétel $\chi(\mathbb{R}^d) \geq 1.1^d$ ha $d=4p-1$ ahol p elég nagy

Biz:

$S \subseteq \{1,2,\dots,4p-1\}$
$|S| = 2p-1$ $\longrightarrow$ $v_S \in \mathbb{R}^{4p-1}$ kar. vektor

$$\|v_S - v_T\|^2 = |S \triangle T| = 2(2p-1-|S\cap T|)$$

v_S: $(\underbrace{1,1,\dots,1}_{2p-1},0,\dots,0)$ $\quad$ szim. differencia: $(S\setminus T)\cup(T\setminus S)$

$\underbrace{1\,1\,\dots\,1}$

$$|S\cap T| = p-1 \iff \|v_S - v_T\|^2 = 2p$$

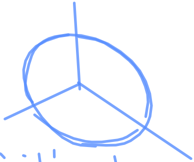
Nézzük a $\sqrt{2p}$ távolságú pontokat. Ha az egyes szín'' $\leq 1.8^{4p-1}$ ilyen van

$$\text{Színek száma} \geq \frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{1.8^{4p-1}} \geq \frac{2^{4p-1}}{c\sqrt{4p}\,1.8^{4p-1}} \geq 1.1^{4p-1} \text{ ha } p \text{ elég nagy}$$

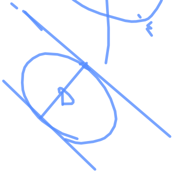
Borsuk sejtés

Tétel: Ha vesszük $\mathbb{R}^d$-ben az egység gömböt, akkor legalább $d+1$ olyan zárt halmazra van szükség a festéséhez, amelyeknek az átmérője 2-nél kisebb.

$d=2$



Tétel: $d+1$ elég is az egységgömb esetén.



Sejtés: Igaz-e, hogy egy d-dimenziós D átmérőjű ~~ka~~ zárt konvex halmaz mindig felbontható $d+1$ zárt halmazra, melyek átmérője D-nél kisebb.

Tétel (Kahn–Kalai)

Legyen $d=\binom{4p-1}{2}$ ahol p elég nagy prím.
Ekkor létezik egy konvex zárt halmaz $\mathbb{R}^d$-ben D átmérővel, melyek D-nél kisebb átmérőjű halmazok bontásához $\geq 1.1^{\sqrt{d}}$ halmaz kell.

Megj: Ha $d=10000$ $1.1^{\sqrt{d}} > d+1$.

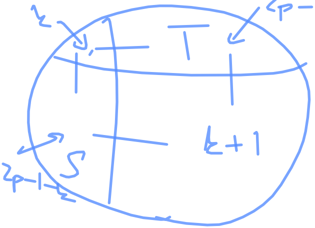
Biz: Legyen $n=4p-1 \Rightarrow K_n$ éleihez rendeljünk d-dimenzióban egy $(0,0,..1,0,...)$ vektort.

$|S|=2p-1 \to V_{S_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{ha } ij \in (S, S^c) \text{ vágásban benne van} \\ 0 & \text{ha nem} \end{cases}$

$S \subseteq \{1,2,\dots,4p-1\}$

$V_S \to (1,0,1,1,1,0)$

$$\|v_S - v_T\|^2 = 2k(2p-1-k) + 2(k+1)(2p-1-k)$$
$$= (4k+2)(2p-1-k)$$



$$\text{diam} = \max_{S,T} \|v_S - v_T\|$$

$$\max_{k \text{ egész}} (4k+2)(2p-1-k)$$
$$= \big(4(p-1)+2\big)\big(2p-1-(p-1)\big)$$

tehát $(p-1)$-nél van a max.

$4p-1$

$|S| = |T| = 2p-1$

$H = \{ v_S \mid |S| = 2p-1,\ S \subseteq \{1, 2, \dots, 4p-1\} \}$

$|H| = \binom{4p-1}{2p-1}$ Felbontás elemszáma $\geq \dfrac{\binom{4p-1}{2p-1}}{1.8^{4p-1}} \geq 1.1^{4p-1} \geq 1.1^{\sqrt{d}}$

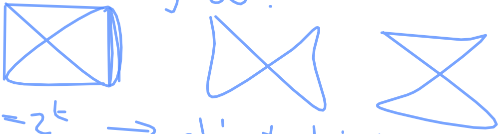
$d = \binom{4p-1}{2}$

□

Graham–Pollak

Feladat: K_n teljes gráf felbontása éldiszjunkt teljes páros gráfokra

Ha nem diszjunkt.



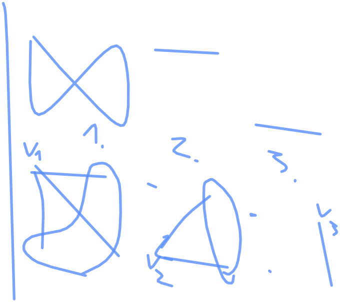
$n=2^k \longrightarrow$ elég k darab

$(0,1,1,\dots 0)$

$i \to A_i = (\quad 0, \quad)$

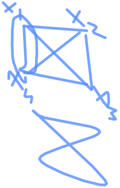
$B_i = (\quad 1 \quad) \dots$

$H_i = (A_i, B_i, E_i)$



Tétel (Graham–Pollak): K_n éldiszjunkt teljes páros gráfokra való felbontásához legalább $n-1$ teljes páros gráf kell

Biz (Tverberg) Tfh m teljes páros gráfra bontható.
Minden csúcshoz rendeljük egy x_i változót.



$$H_i=(A_i,B_i,E_i)$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j\in A_i}x_j\Big)\Big(\sum_{s\in B_i}x_s\Big)$$

$$(x_1+x_4)(x_2+x_3)$$

$\forall i \quad \sum_{j\in A_i}x_i=0 \qquad m$

$\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \qquad 1$

$m+1$ egyenlet

Ha $m < n-1$ akkor $m+1 < n$

$\Longrightarrow$ van nem triviális megoldása az egyenletrendszernek.

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j\in A_i} x_j\right)\left(\sum_{s\in B_i} x_s\right)$$

$$0 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}_{=0} - 2\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j\in A_i} x_j\right)}_{\substack{u_i^T x = 0 \\ \|}\ 0}\left(\sum_{s\in B_i} x_s\right) = 0.$$

$\lightning$

Tétel Legyen G gráf. Legyen A_G az adjacencia mátrixa. Tegyük fel, hogy A_G-nek n^+ pozitív és n^- negatív sajátértéke van. Legyen $H_1, H_2, \dots, H_m$ teljes páros gráfok, melyek élhalmaza diszjunkt és $\bigcup_{i=1}^{m} E(H_i) = E(G)$. Ekkor $m \geq \max(n^+, n^-)$

Megj.

$$A_{K_n} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$n-1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad -1^{(n-1)}: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \sum x_i = 0$$

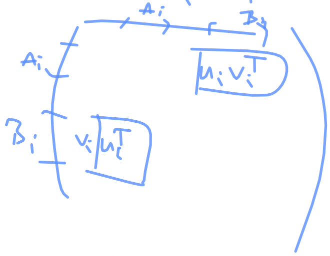
$n^+ = 1$

$n^- = n-1$

Biz: $H_i = (A_i, B_i, E_i)$

u_i, v_i karakterisztikus vektorok $\mathbb{R}^n$-ben

n csúcsú gráf.



$$A_{H_i} = u_i v_i^T + v_i u_i^T$$

$$A_G = \sum_{i=1}^{m} \left(u_i v_i^T + v_i u_i^T \right)$$

$$V = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

$$x \in V^{\perp} \Rightarrow x u_i^T = 0$$

$$x^T A_G x = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{x^T u_i}_{0} v_i^T x + x^T v_i \underbrace{u_i^T x}_{0} = 0$$

$$V^{+} = \langle w_i \mid A w_i = \lambda_i w_i \quad \lambda_i > 0 \rangle$$

feltéve, hogy merőlegesek a w_i sajátvektorok

$$x = \sum_{i=1}^{n^+} \alpha_i w_i \qquad x^T A_G x$$

$$\underline{x}^T A_G \underline{x} = \left(\sum \alpha_i w_i\right)^T A_G \left(\sum \alpha_i w_i\right) \qquad (w_i, w_j) = \delta_{ij}$$

$$= \left(\sum \alpha_i \underline{w}_i\right)\left(\sum \alpha_i \lambda_i \underline{w}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n^+} \alpha_i^2 \lambda_i$$

$x \in V^+$ és $\underline{x} \neq \underline{0} \implies \underline{x}^T A_G \underline{x} > 0$

$$V^\perp \cap V^+ = \{\underline{0}\} \implies \underset{\underset{\displaystyle n-m}{\|}}{\dim(V^\perp)} + \dim(V^+) \leq n$$

$$n - m + n^+ \leq n$$

$$n^+ \leq m$$

(Ha a neg sajátértékeket vesszük, akkor $\underline{x} \in V^- \implies x^T A_G x < 0$

$\implies V^- \cap V^\perp = \{\underline{0}\} \implies n^- \leq m$.)

$\square$

Tétel: G gráf $\alpha(G)$ a legnagyobb független halmaz mérete, n'_+ és n'_- a nemnegatív és nempozitív sajátérték száma. Ekkor $\alpha(G) \le \min(n'_+, n'_-)$.

Graham–Pollak tétel eredete

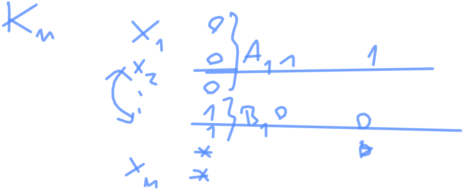
G gráf

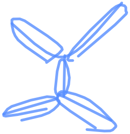
$$X_v \to 0,\ 1,\ *,\ 1,\ 0,\ *,\ 0,\ 0$$
$$X_u \to 1,\ *,\ 0,\ 0,\ 1,\ *,\ *,\ 1$$

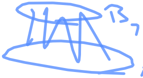
Kívánság: $d_H(X_v, X_u) = \mathrm{dist}(u,v)$

$*$ nem számít — gráfbeli távolság.

Kérdés: hány koordináta kell?







Nem lehet, hogy egy él két $H_i=(A_i,B_i)$ és $H_j=(A_j,B_j)$ teljes páros gráfban is benne legyen.

K_n-re kell $\ge n-1$ koordináta, $n-1$ elég is.

Általában $D_G = \sum_{i=1}^{m} A_{H_i} \Rightarrow m \ge \max(n^+(D_G), n^-(D_G))$

távolsági mátrix $(d(i,j))$

Fákra $n^-(D_G) \ge n-1$.

$n-1$ élű fákra áll egyenlőség.

Tétel (Graham–Pollak)

Mindig meg lehet címkézni a csúcsokat $\leq n-1$ hosszú $(0,1,*)$-vektorokkal a kívánságnak megfelelően.

Generátorfüggvények

$a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!} \quad \text{exponenciális generátorfüggvény}$$

$A_1(z) = \sum a_k z^k \qquad B_1(z) = \sum b_r z^r \qquad A_1(z)B_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k} a_k b_{n-k} \right) z^n$

$A_2(z) = \sum_k a_k \frac{z^k}{k!} \qquad B_2(z) = \sum b_r \frac{z^r}{r!}$

$$A_2(z)B_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right)} \frac{z^n}{n!}$$

Számelmélet

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\qquad G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}$$

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d\mid n}a_d\,b_{\frac{n}{d}}\right)\frac{1}{n^s}$$

Dirichlet

Fibonacci számok

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \implies F_d \mid F_n$ ha $d \mid n$

$F_1 = 0 \quad F_2 = 1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	2	3	5	8	13	21

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + \dots$$

$$F(z) := z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + \dots$$

$$zF(z) = \qquad z^2 + 1z^3 + 2z^4 + 3z^5 + \dots$$

$$z^2F(z) = \qquad 1z^3 + 1z^4 + 2z^5 + \dots$$

$$F(z)(1 - z - z^2) = z$$

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1\varphi_2 + c_2\varphi_1 = -1$$

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{c_1}{1 - \varphi_1 z} + \frac{c_2}{1 - \varphi_2 z} = \frac{c_1(1 - \varphi_2 z) + c_2(1 - \varphi_1 z)}{(1 - \varphi_1 z)(1 - \varphi_2 z)}$$

$$1 - z - z^2 = (1 - \varphi_1 z)(1 - \varphi_2 z)$$

$$\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z}$$

$$\frac{1}{1 - cz} = 1 + cz + c^2z^2 + c^3z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k z^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k z^k$$

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right)}_{F_k} z^k$$

$$= \sum F_k z^k$$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right)$$

$$\frac{1}{(1-z)^m}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \sum \lambda_i v_i v_i^T \qquad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$(v_i)\,\boxed{}\;(v_i^T)$$

$$M^n = \sum \lambda_i^n v_i v_i^T$$

$$M^1, M^2, M^4, M^8, \ldots$$

$$M^{13} = M^8 \cdot M^4 \cdot M^1$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}}$$

$$x^2 - x - 1 \qquad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_{n+1} = v_{11}^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + v_{21}^2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n = v_{11} v_{12} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + v_{21} v_{22} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$M^{a+b} = M^a M^b$$

$$\begin{pmatrix} F_{a+b+1} & F_{a+b} \\ F_{a+b} & F_{a+b-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{a+1} & F_a \\ F_a & F_{a-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{b+1} & F_b \\ F_b & F_{b-1} \end{pmatrix}$$

$$F_{a+b+1} = F_{a+1} F_{b+1} + F_a F_b$$

Catalan számok

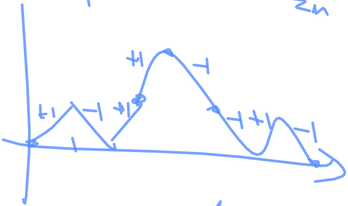
$(s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ sorozatok száma,

melyre $s_i = \pm 1$

$s_1 + s_2 + \ldots + s_r \geq 0$

$s_1 + \ldots + s_{2n} = 0$

Legyen az ilyen sorozatok száma C_n.



$C_0 = 1$

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

$C_3 = 5$

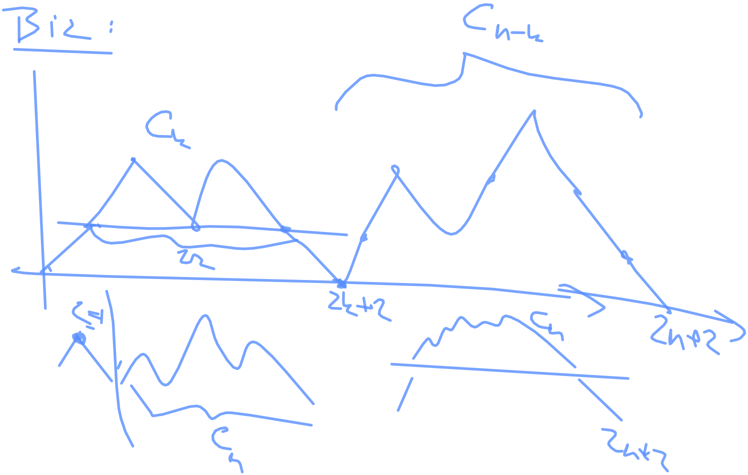
$C_4 = 14$

$C_5 = 42$

R. Stanley

A'll : $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$

Biz :



$$C(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$$

$$1 + z + 2z^2 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}$$

$$C^2(z) = \underbrace{\underset{\substack{\parallel \\ C_1}}{C_0^2} + \underbrace{(2C_0C_1)}_{C_2}z + \underbrace{(C_0C_2 + C_1^2 + C_2C_0)}_{C_3}z^2 + \dots}_{\frac{C(z)-1}{z}}$$

$$C^2(z) = \frac{C(z)-1}{z}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

$$\boxed{C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}}$$

($z=0$ mellett csak ez lehet.)

$$(1+z)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \dots$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4z)^k}{2z}$$

$$C_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}$$

$$2 \cdot 4 \cdots 2n = 2^n n!$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{-\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}-2\right)}_{-\frac{3}{2}} \cdots \underbrace{\left(\frac{1}{2}-n\right)}_{-\frac{2n-1}{2}}}{1\cdot 2 \cdots n+1} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}(-1)^n$$

$$-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!\,2^n n!}(-1)^n (4)^{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}. \to C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-4z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n n!} 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

$$\frac{1}{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \right) z^n$$

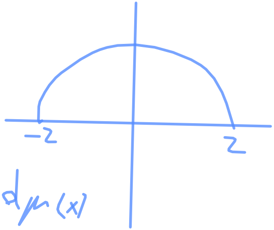
$$\sum_n (4z)^n$$

$$2^n n! = 2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

$f(x): [-2,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$$



$$\int_{-2}^{2} h(x) f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} h(x)\,d\mu(x)$$

$$\int_{-2}^{2} x^n\,d\mu(x) = \int_{-2}^{2} x^n f(x)\,dx = \begin{cases} C_{n/2} & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0 & n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\int f(x)\,d\delta_0 = f(0)$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 1$$

$\pm 1 \quad -1$

± 1

-1

Snake oil módszer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 2^k \frac{1}{k+1} \binom{n-k}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$\underline{\text{A'll:}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} =$ $\boxed{\displaystyle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(1\ \ 2z)^{2k+1}}}$

$\underline{\text{Biz:}}$ $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \right) z^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} z^n$$

$$\frac{(2z)^{2k}}{(1-2z)^{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=0} 2^{-k} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+k}{2k} (2z)^n \right] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{1}{(2z)^k} \sum_{n} \binom{n+k}{2k} (2z)^{n+k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \dots = \sum_k \binom{k+2}{2} z^k$$

$$\frac{1}{(1-z)^4} = 1 + 4z + 10z^2 + 20z^3 + \dots = \sum_k \binom{k+3}{3} z^k$$

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum \binom{m-1+k}{m-1} z^k$$

$$\boxed{\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{m} z^n}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 4 1

10 10 5

20

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(1-2z)^{2k+1}}=\frac{1}{1-2z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{(1-2z)^2}\right)^k$$

$c_1+c_2=1$

$4c_1+c_2=2$

$c_1=\frac{1}{3}\quad c_2=\frac{2}{3}$

$$=\frac{1}{1-2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{(1-2z)^2}}=\frac{1-2z}{(1-2z)^2-z}=\boxed{\frac{1-2z}{1-5z+4z^2}}$$

$$=\frac{1-2z}{(1-z)(1-4z)}=\frac{c_1}{1-z}+\frac{c_2}{1-4z}=\frac{c_1(1-4z)+c_2(1-z)}{(1-z)(1-4z)}$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{1-4z}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(2\cdot 4^n+1)z^n$$

$$A_n=\frac{1}{3}(2\cdot 4^n+1)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}=\frac{1}{3}(2\cdot 4^n+1)}$$

Áll: $$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k$$

Biz: $$A_n = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} \qquad B_n = \sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k$$

Azt fogjuk bizonyítani, hogy $\sum A_n z^n = \sum B_n z^n$.
$\Longrightarrow A_n = B_n$.

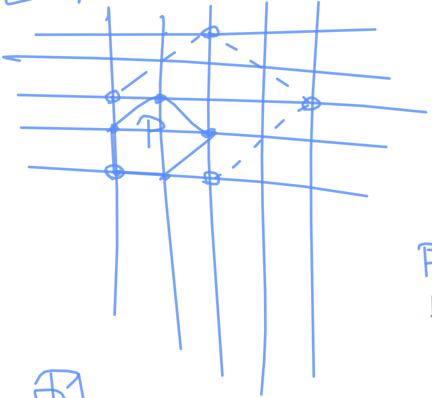
$$\sum_n \left(\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} \right) z^n = \sum_k \binom{m}{k} \underbrace{\sum_n \binom{n+k}{m} z^n}_{\frac{z^{m-k}}{(1-z)^{m+1}}}$$

$$= \sum_k \binom{m}{k} \frac{z^{m-k}}{(1-z)^{m+1}} = \frac{1}{(1-z)^{m+1}} \sum_k \binom{m}{k} z^{m-k} = \frac{(1+z)^m}{(1-z)^{m+1}}.$$

$$\sum_n \left(\sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k \right) z^n = \sum_k \binom{m}{k} 2^k \sum_n \binom{n}{k} z^n = \sum_k \binom{m}{k} 2^k \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{1-z} \sum_k \binom{m}{k} \left(\frac{2z}{1-z}\right)^k = \frac{1}{1-z}\left(1 + \frac{2z}{1-z}\right)^m = \frac{(1+z)^m}{(1-z)^{m+1}}. \qquad \square$$

Ehrhart elmélet

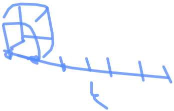


$$\underbrace{tP \cap \mathbb{Z}^d}_{\text{rácspontok száma } tP\text{-ben}}$$

$$E_P(t) = |tP \cap \mathbb{Z}^d|$$

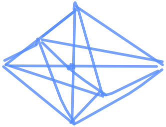
Polinom t-ben

Ehrhart polinom.



$$E_{Q_d}(t) = (t+1)^d$$

$$C_d = \mathrm{conv}(\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d\})$$



$$E_{C_n}(m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$$

$$= \sum \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k$$

$$E_{C_n}(m) = E_{C_m}(n)$$

Szám partíciók

$p(n)$ az n szám felbontásai száma egészek összegére úgy, hogy a sorrend nem számít.

$p(0)=1.$

Pl. $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$

$p(5)=7$

$p_{\le k}(n)$ n szám felbontásai $\le k$ részre

$p^{\le k}(n)$ n szám felbontásai úgy, hogy minden összeadandó $\le k$.

Áll: $p_{\le k}(n)=p^{\le k}(n)$

Biz: Ferrers diagram konjugálás bijekció.

Áll: $$\sum_{n=0}^{\infty} P_{\le k}(n) x^n = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j}$$

Biz:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^k}$$

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)\dots(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots)$$

$1+1+1 \qquad 2+2 \qquad k+k+k$

$k=3$

$n=5$

x^5 eh!

$x^5 \cdot 1 \cdot 1 \qquad 1+1+1+1+1$

$x^2 \cdot 1 \cdot x^3 \qquad 1+1+3$

$$\frac{1}{1-x^j} = \sum_{t=0}^{\infty} x^{jt} \leftarrow$$ t-darab j-t választok a partícióba.

Áll: $\sum_n p(n)x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$

Biz:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)\dots(1+x^n+x^{2n}+\dots)$$

$r<n$ „lim" $\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$ „az eleje a gen. fv. beáll"

$$[x^r]\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} = [x^r]\prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-x^j}$$

x^r eh.

$p(n) = p_{\leq n}(n)$ („az" állításból kész vagyunk.)

Áll: Legyen $p_o(n)$ az n olyan partícióinak száma, melyben minden tag páratlan (o = odd). Legyen $p_u(n)$ az n olyan partícióinak száma, ahol minden tag különböző (u = unequal).

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n) x^n = \prod_{j=1\,(2)}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_u(n) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1+x^j)$$

(c)
$$p_o(n) = p_u(n)$$

$$\prod_{j\equiv 1\,(2)} \frac{1}{1-x^j} = (1+x+x^2+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+\dots$$

$1+1+1$ $\quad x^3$ $\qquad 3+3+3+3$ $\quad x^{12}$

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^j) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)$$

x^1

Mivel j-ből ≤ 1 lehet benne, most mindig $x^{2j}+x^{3j}+\dots$

$2+5+7$

$1\,(1+x^2)\,1\,(1+x^5)(1+x^7)\,1$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}\cdot\frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{\cancel{1-x^4}}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x^5}\cdot\cancel{1-x^6}$$

x^{10}

$$(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{10}) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}\cdot\frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{1-x^6}}{\cancel{1-x^3}}\cdot\cancel{1-x^4}\cdots\frac{1-x^{20}}{1-x^{10}}$$

$$1+x^j = \frac{1-x^{2j}}{1-x^j}$$

$\square$

Bijekció $p_o(n) = p_n(n) - n.$

$$\underbrace{1+1+1+1+1}_{m}+\underbrace{3+3+3}+\underbrace{5+5+5+5+5+5}$$

$5 = 4+1 \quad 3 = 2+1 \quad 6 = 4+2$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$4\cdot 1 + 1\cdot 1 \quad 2\cdot 3+3 \quad 4\cdot 5 + 2\cdot 5$

$4+1 \quad 6+3 \quad 20+10$

$\longrightarrow 1+4+3+6+10+20$

$\boxed{S = 2^i \cdot r}$ r páratlan egyért. „lnnr" 2^i-els

$1+3+7+10+18+6 \quad 2^i j \to \underbrace{j+j+\ldots+j}$

$1+3+7+2\cdot 5+2\cdot 9 \longrightarrow 1+\underline{3}+7+5+5+9+9+\underline{3+3}$

Tétel: $p(n) < \dfrac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$.

Tétel (Hardy–Ramanujan)

$$p(n) \simeq \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}_{f(n)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{f(n)} = 1.$$

Biz: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}$

Ötlet: keressünk egy t számot, hogy $p(n)t^n \sim P(t)$.

$0<t<1$

$$P(n)t^n < P(t)$$

$$P(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^j}$$

$$\log P(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-t^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{kj}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} t^{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{t^k}{1-t^k}$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{k}\frac{t}{1-t} = \frac{t}{1-t}\frac{\pi^2}{6}$$

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\frac{1-t^j}{1-t} = 1 + t + t \dots + t^{j-1}$$
$$> j t^{j-1}$$

$$\frac{1}{j t^{j-1}} > \frac{1-t}{1-t^j}$$

$$\frac{1}{1-t}\frac{t}{j} > \frac{t^j}{1-t^j}$$

$$\frac{1}{j}\frac{t}{1-t} > \frac{t^j}{1-t^j}$$

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) t^k \geq \sum_{k=n}^{\infty} p(k) t^k$$

$$\overset{p(k) \geq p(n)}{\geq} p(n) \sum_{k=n}^{\infty} t^k$$

$$= p(n) \frac{t^n}{1-t}$$

$$\frac{1-t}{t^n} P(t) > p(n)$$

$$\log p(n) < \log \frac{1-t}{t^n} + \log P(t) < \log \frac{1-t}{t^n} + \frac{t}{1-t} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$u = \frac{1-t}{t} \qquad t = \frac{1}{1+u}$$

$$\log p(n) < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{u} - n \log \frac{1}{1+u} + \log \frac{u}{1+u} = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u} + (n-1) \underbrace{\log (1+u)}_{\leq u} + \log \frac{1}{u}$$

$$\log(1+u) < u$$

$$1+u < e^u$$

$$\boxed{\log p(n) < \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{u} = (n-1) u + \log n}$$

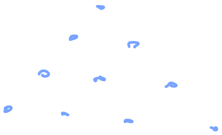
$$u = \sqrt{\frac{\pi^2}{6(n-1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}}$$

$$\log p(n) \leq 2(n-1)u + \log n$$

$$= \pi \sqrt{\frac{2}{3}(n-1)} + \log \frac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}}$$

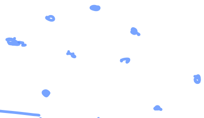
$$p(n) < \frac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}} e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}(n-1)}}$$

Euler ötszög szám-tétel
(pentagonal numbers)



$\binom{n}{2}$

n^2



$$\frac{3k^2 \pm k}{2}$$

k	1	2	3
$\frac{3k^2+k}{2}$	2	7	15
$\frac{3k^2-k}{2}$	1	5	12

n partíció különböző számokra

$p_e(n)$ páros sok darabbal $\quad 3+1 \quad | \quad 4+1,\ 3+2$

$p_o(n)$ páratlan sok darab $\quad 4 \quad | \quad 5$

$p_e(4) = p_o(4) = 1 \qquad p_o(5) = 1 \quad p_e(5) = 2$

Tétel (Euler)

$$P_e(n)-P_o(n)=\begin{cases}(-1)^k & \text{ha } n=\dfrac{3k^2\pm k}{2}\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Biz:

I: Ha $b \le s \Rightarrow$ bázist megpróbáljuk a lejtő mellé tenni.

II: Ha $b > s \Rightarrow$ lejtő pontjait betesszük a bázis alá.

$n = (k+1) + \dots + (2k) = \frac{3k^2+k}{2}$

I nem alkalmazható ha $b = s = k$ és van közös pontjuk

$n = k + (k+1) + \dots + (2k-1) = k^2 + (1+2+\dots+k-1) = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{3k^2-k}{2}$

Tétel:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_e(n)-P_o(n)\right)x^n$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}}+x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)$$

Biz:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=\sum_{n=1}^{\infty}P_u(n)x^n$$

$$(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x)\quad 10=5+3+2$$

$$\prod(1-x^k)$$

Partíció $(-1)^{\text{hány }k\text{-t}}$

$$(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x)$$

$5+3+2$ $(-1)^3$

$8+2$ $(-1)^2$

Emlékeztető

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)}$$

$$\boxed{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(p_e(n)-p_o(n)\right)x^n = 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)$$

$$1 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}} + x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right)\right)$$

x^n

$$0 = p(n) \underbrace{-\,p(n-1)-p(n-2)}_{k=1} \underbrace{+\,p(n-5)+p(n-7)}_{k=2} - \dots$$

Gyors rekurzió

$$\boxed{p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(p\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+p\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)\right)}$$

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma(k)\, p(n-k)$$

$\sigma(k)$ k osztóinak összege

Számpartíciók dobozban

q-analógok

$$(n)_q = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$(n)_q! = 1\cdot(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$

$$= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}{(q-1)^n}$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!} = \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-k+1)_q}{(k)_q!}$$

$$\binom{4}{2}_q = \frac{1\cancel{(1+q)}(1+q+q^2)\boxed{(1+q+q^2+q^3)}}{1\cancel{(1+q)}\cdot 1\cdot\boxed{(1+q)}} = (1+q+q^2)(1+q^2) = 1+q+2q^2+q^3+q^4$$

$$\underbrace{\frac{1+q+q^2+q^3}{1+q}}_{1+q^2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Tétel: $\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q$

Biz:

$$\frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!} = \frac{(n-1)_q!}{(k)_q!\,(n-1-k)_q!} + q^{n-k}\frac{(n-1)_q!}{(k-1)_q!\,(n-k)_q!}$$

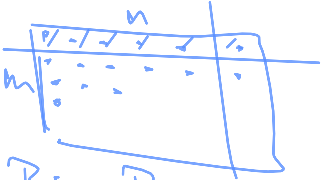
$$(n)_q = (n-k)_q + q^{n-k}(k)_q$$

$$\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^{n-k}-1}{q-1} + q^{n-k}\frac{q^k-1}{q-1}$$

Köv: $\binom{n}{k}_q$ polinom, sőt nemnegatív egész együtthatós polinom.

Legyen $\binom{n+m}{n}_q = \sum_{i=0}^{nm} P_i(n,m)\, q^i$

Áll: $P_i(n,m)$ az i azon partíciói, melynek legfeljebb m eleme van és minden elem legfeljebb n.



Ferrers diagram belefér az $n \times m$-es dobozba.

Biz: Rekurzió $P_i(n,m)$-re.

1. eset: ha a legnagyobb elem $\le n-1 \Rightarrow (n-1)\times m$-es dobozba is belefér. $P_i(n-1,m)$.

2. eset: ha a legnagyobb elem n $\Rightarrow P_{i-n}(n,m-1)$
$i-n$ partíció egy $n \times (m-1)$ dobozba.

$$P_i(n,m) = P_i(n-1,m) + P_{i-n}(n,m-1)$$

$$\binom{n+m}{n}_q = \binom{n-1+m}{n}_q + q^{m}\binom{n+m-1}{n-1}_q$$

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q$$

$$\sum P_i(n,m-1)q^i + q^m \sum P_j(n-1,m)q^j$$

q^i ehója $\quad P_i(n,m-1) + P_{i-m}(n-1,m) = P_i(n,m)$

Kezdőeseteket leellenőrizve indukcióval kapjuk, hogy $\binom{n+m}{n}_q = \sum_{i=0}^{nm} P_i(n,m)q^i$

$\left[P(n,m) = \sum P_i(n,m)q^i \Rightarrow P(n,m) \text{ és } \binom{n+m}{n}_q \right.$ rekurziója megegyezik $\left.\right]$

Megj.: Triviális

$$\binom{n+m}{n}_q = q^{nm}\binom{n+m}{m}_{1/q}$$

$$P_i(n,m) = P_{nm-i}(n,m)$$

nm−i partíciója

$$\binom{4}{2}_q = 1+1q+2q^2+1q^3+q^4$$

Tétel

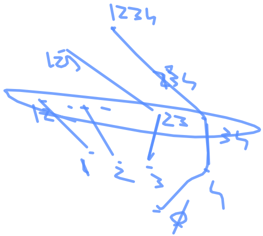
$p_0(n,m) \le p_1(n,m) \le p_2(n,m)$

$\le p_{\lfloor \frac{nm}{2} \rfloor}(n,m) \ge p_{\lfloor \frac{nm}{2} \rfloor + 1}(n,m) \ge \dots \ge p_{nm}(n,m)$

Unimodális sorozat

$a_0 \le a_1 \le \dots \le a_k \ge a_{k+1} \ge \dots \ge a_n$

$\binom{n}{0} \le \binom{n}{1} \le \dots \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ge \dots \ge \binom{n}{n}.$



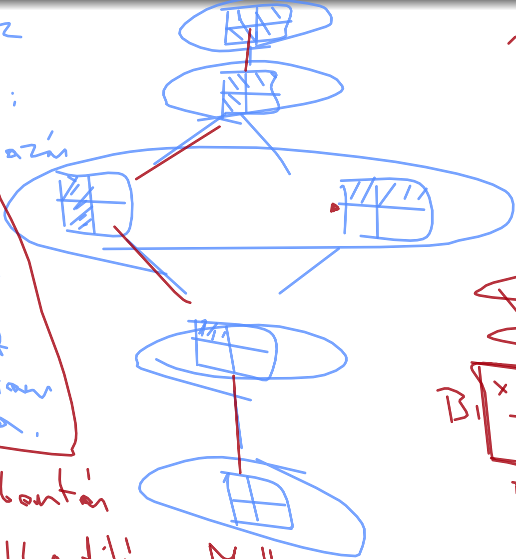
$A_i \not\subseteq A_j \quad A_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$|A| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

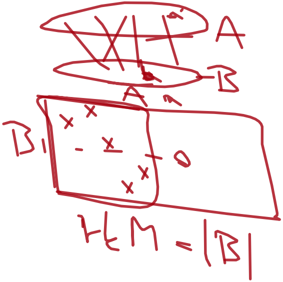
LYM $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \le 1$

$n=m=2$

Poset: tartalmazás



R. Stanley
Algebraic Combinatorics
~6. fejezet



Áll: kisebb szintet bele lehet párosítani nagyobba.

⇓

láncfelbontás

⇓

legnagyobb antilánc a középső szint.

Mellesleg unimodális a sorozat.

$(n)_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$

$(n)_q! = (1)_q (2)_q \cdots (n)_q$

$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!}$

Tétel: Ha q prímhatvány, akkor $\binom{n}{k}_q$ az $\mathbb{F}_q$ feletti n dimenziós tér k dimenziós altereinek száma.

Biz: $\{V, v_1, \ldots, v_k \mid V \subseteq \mathbb{F}_q^n$ k-dim. altere, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ független$\}$ (rendezett k-as)

v_1: $q^n - 1$ féleképpen választható!

v_2: $q^n - q$ (bármi csak ne v_1 konstansszorosa)

v_3: $q^n - q^2$ (bármi csak ne $\langle v_1, v_2 \rangle$-beli vektor.

$$(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{k-1})$$

$$=q^{\binom{k}{2}}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)$$

Legyen $N_{n,k}^{(q)}$ a k dimenziós alterek száma.

$$N_{n,k}^{(q)}\underbrace{q^{\binom{k}{2}}(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$$

V-ből választjuk $v_1,\dots,v_k$ előzőhöz hasonlóan

$$N_{n,k}^{(q)}=\frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)}=\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)(q^{n-k}-1)\cdots(q-1)}$$

$$=\frac{(n)_q!}{(k)_q!\,(n-k)_q!}=\binom{n}{k}_q.$$

$\mathcal{U}$ $a_1, a_2, \ldots, \ldots$

$(n_{\mathcal{U}})! = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{U}} = \frac{(n_{\mathcal{U}})!}{(k_{\mathcal{U}})!\,(n-k_{\mathcal{U}})!}$$

$a_n = q^n - 1 \qquad q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1$

$\binom{n}{k}_{\mathcal{U}}$ egész $\Longleftarrow$ $(a_n, a_k) = a_{(n,k)}$ $\longleftarrow$ legnagyobb közös osztó

$(q^n - 1, q^k - 1) = \underbrace{q^{(n,k)}}_{x} - 1$

$d \mid q^n - 1$

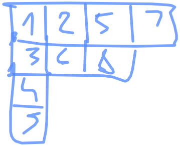
$d \mid q^k - 1 \Rightarrow d \mid q^{n-k} - 1$

$\cdot q^{n-k}$

$(F_n, F_k) = F_{(n,k)}$

$\rightarrow$ Fibonomiális együttható.

Hook-length formula
(Kampó-hosszúság formula)



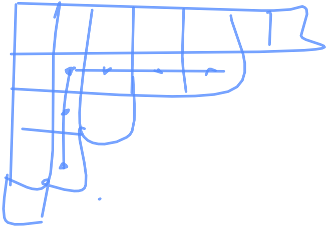
standard Young-tabló

→

↓ növekszik

<u>Kérdés:</u> Adott λ partíció. Hány standard Young-tabló tartozik hozzá?

Jelöljük ezt f^λ-val.



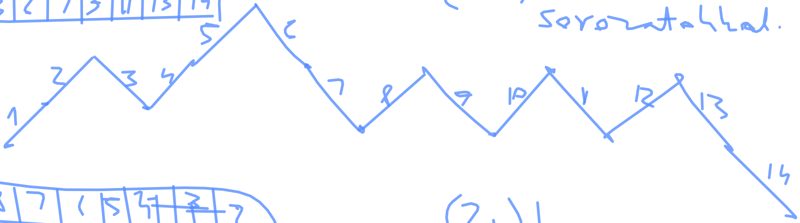
(i, j) mező kampójának (sorban jobbra, oszlopban alatta) hossza $h_{(i,j)}$

Tétel (Frame, Robinson, Thrall)

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)} h_{(i,j)}}$$

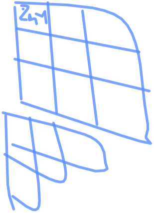
1	2	4	5	8	10	12
3	6	7	9	11	13	14

$\xleftrightarrow{\text{bijekció}}$ (± 1) Catalan sorozatokkal.

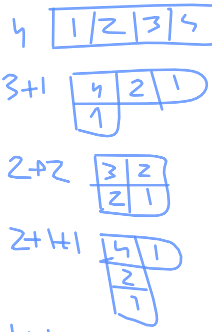


8	7	1	5	4	3	2
7	6	5	4	3	2	1

$$\frac{(2n)!}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2\cdots(n+1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$



$$\frac{(n^2)!}{\quad}$$



1

3

2

3

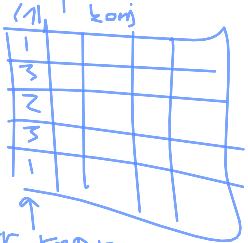
1

$$\sum_\lambda (f^\lambda)^2 = n!$$

S_n konjugált osztályai

$\Updownarrow$

n partícióival



karakter tábla

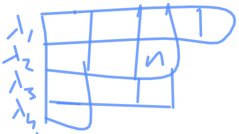
irr. repr. dimenziói

S_n-nek f^λ

$1^2+3^2+2^2+3^2+1^2=24$

a dimenziók fel

Kampó formula bizonyítása



$$f^\lambda = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) +$$
$$f(\lambda_1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_k) \qquad (R)$$
$$\vdots$$
$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - 1)$$

Majdnem partíció: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_n)$ számsorozat ahol $\lambda_i - 1 < \lambda_{i+1}$.
Ilyenre 0-nak definiáljuk f-et.

Peremfeltételek

(1) $f((1)) = 1$

(2) $f(\lambda'_1, \dots, \lambda'_k) = 0$ ha $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ majdnem partíció.

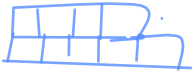
(3) $f(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Cél: kampó formula elégítse ki ugyanezeket a feltételeket

$$\boxed{g(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)! \prod_{i<j} \left((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)\right)}{\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i + m - i)!}}$$

Később: ez a kampó formula g teljesíti (1), (2), (3), (R)-et.

(2)

λ_i 

$\lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$

$\underbrace{(\lambda_i - i) - (\lambda_{i+1} - (i+1))}$ $= 0$

Szerepel g-ben, így g majdnem partíciója 0-val egyenlő.

$$g(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0) =$$

$$\frac{\left(\sum \lambda_i\right)! \prod_{i<j\le m} \left((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)\right) \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - i + m + 1)}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + (m+1) - i)! \; 0!}$$

$$= \frac{\left(\sum \lambda_i\right)! \prod_{i<j\le m} \left((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)\right) \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - i + m + 1)}{\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i + m - i)! \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i + m + 1 - i)}$$

$$= g(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

$$\frac{\left(\sum \lambda_i\right)! \prod_{i<j} \left((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)\right)}{\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i + m - i)!}$$

$$\lambda_{m+1} + (m+1) - (m+1)$$

R

$$g(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = g(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + g(\lambda_1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_m) + \dots + g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m - 1)$$

$$\frac{\left(\sum^{n} \lambda_i\right)! \prod_{j<i} \left((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)\right)}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + m - i)!}$$

$$\frac{g(\lambda_1, \dots, \lambda_k - 1, \dots, \lambda_m)}{g(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_m)} = \frac{1}{n}(\lambda_k + m - k) \prod_{i<k} \frac{(\lambda_i - i) - (\lambda_k - 1 - k)}{(\lambda_i - i) - (\lambda_k - k)} \cdot \prod_{j>k} \frac{(\lambda_k - 1 - k) - (\lambda_j - j)}{(\lambda_k - k) - (\lambda_j - j)}$$

$$z_j = \lambda_j - j$$

$$\frac{(\lambda_i - i) - (\lambda_k - 1 - k)}{(\lambda_i - i) - (\lambda_k - k)} = \frac{z_i - z_k + 1}{z_i - z_k} = 1 + \frac{1}{z_i - z_k}$$

$j > k$

$$\frac{(\lambda_k - 1 - k) - (\lambda_j - j)}{(\lambda_k - k) - (\lambda_j - j)} = \frac{z_k - 1 - z_j}{z_k - z_j} = \frac{1 + z_j - z_k}{z_j - z_k} = 1 + \frac{1}{z_j - z_k}$$

$$\frac{1}{n}(z_k + m)\prod_{i \neq k}\left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right)$$

R ekv.
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}(z_k + m)\prod_{i \neq k}\left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right) = 1$$

$$n = \sum \lambda_i = \sum_{i=1}^{m}(z_i + i)$$

$$w_i = z_i + m$$

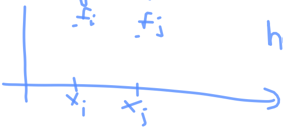
$$n = \sum_{i=1}^{m}(w_i - m + i) = \sum w_i - \frac{m(m-1)}{2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} w_k \prod_{i \neq k}\left(1 + \frac{1}{w_i - w_k}\right) = 1$$

R

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} w_k \prod_{i \neq k}\left(1 + \frac{1}{w_i - w_k}\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i - \frac{m(m-1)}{2}}$$

Lagrange interpoláció



$$h(z)=\sum_{j=1}^{m} f_j \prod_{i\neq j} \frac{(z-x_i)}{x_j-x_i}$$

$$h(x_j)=f_j$$

Ha h_1 és h_2 foka $\leq m-1$ és m helyen megegyeznek, akkor $h_1=h_2$.

Legyen $f_j=x_j$

$$z=\sum_{j=1}^{m} x_j \prod_{i\neq j} \frac{z-x_i}{x_j-x_i}$$

z^{m-1} ehója ha $m\geq 3$

$$0=\sum_{j=1}^{m} x_j \prod_{i\neq j} \frac{1}{x_j-x_i}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \prod_{i\neq k}\left(1+\frac{1}{w_i-w_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

$$+ \sum_{k\,i}\left(w_k \frac{1}{w_i-w_k} + w_i \frac{1}{w_k-w_i}\right)$$

$$\underbrace{\frac{w_k}{w_i-w_k} - \frac{w_i}{w_i-w_k}}_{-1}$$

$$+ \underbrace{\sum_{t=3}^{n} \sum_{|S|=t} \sum_{r\in S} w_r \prod_{\substack{j\in S\\ j\neq r}} \frac{1}{w_j-w_r}}_{0}$$

Lagrange interpolási ($t\geq 3$)

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k - \frac{k(k-1)}{2} + 0$$

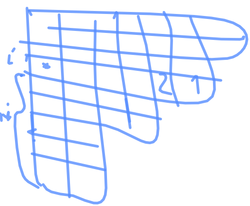
Ezzel beláttuk az azonosságot és így a rekurziót.

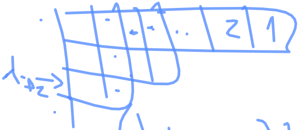
$$g(\lambda_1,\dots,\lambda_m) = \frac{\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}_{n}\Big)! \prod_{1<j} \big((\lambda_i - i)-(\lambda_j - j)\big)}{\prod_{i=1}^{m} (\lambda_i+m-i)!}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{[i,j]} h_{[i,j]}}$$

1 Kell:

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+m-i)!}{\prod_{i<j}\big((\lambda_i-i)-(\lambda_j-j)\big)} = \prod_{(i,j)} h_{(i,j)}$$





$1\cdot 2\cdot 3 \ \dots \ (\lambda_i-\lambda_{i+1})$

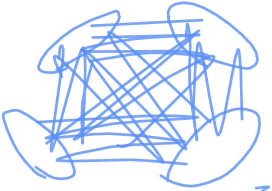
$(\lambda_i-\lambda_{i+1}+2) \ — \ (\lambda_i-\lambda_{i+2}+1)$

$(\lambda_i-\lambda_{i+2}+3) \ \dots \ (\lambda_i-\lambda_{i+3}+2)$

$(\lambda_i-\lambda_{i+3}+4) \ \dots \ \square$

$$\frac{(\lambda_i+m-i)!}{\prod_{j>i}\big((\lambda_i-i)-(\lambda_j-j)\big)} \ \dots \ (\lambda_i+m-i)$$

Extremális gráfelmélet



$$ex(n,H) = \max\left(e(G) \mid \begin{array}{l} G \text{ n csúcsú} \\ H \not\subseteq G \end{array}\right)$$

$$ex(n,\Delta) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

$$ex(n,C_4) \leq \frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$$

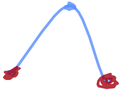
Tétel (Bondy – Simonovits)

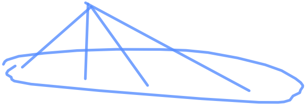
Minden $k \geq 2$-re létezik $c(k)$, hogy

$$ex(n,C_{2k}) \leq c(k)\, n^{1+\frac{1}{k}}.$$

Tétel: $ex(n, C_4) \le \frac{1}{2} n^{3/2} + \frac{n}{4}$.

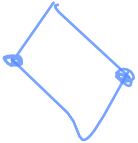
Biz:





d_i $\quad \binom{d_i}{2}$

$$cs = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$$



Két pontra legfeljebb 1 cseresznye illeszkedik. Kettő már C_4 lenne.

$$cs \le \binom{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \le \binom{n}{2}$$

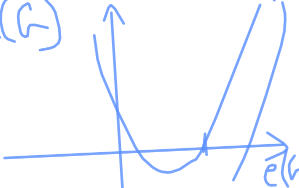
$$\binom{n}{2} \ge \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{2} \sum d_i$$

$$\ge \frac{1}{2} n \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} \sum d_i$$

$$= \frac{2e(G)^2}{n} - e(G)$$

$$\binom{n}{2} \ge \frac{2e(G)^2}{n} - e(G)$$

$$0 \ge \frac{2}{n} e(G)^2 - e(G) - \binom{n}{2}$$



$$e(G) \le \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{2}{n} \binom{n}{2}}}{2 \cdot \frac{2}{n}} = \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}\right) \le \frac{n}{4}\left(1 + 2\sqrt{n}\right)$$

$$\frac{n^{3/2}}{2} + \frac{n}{4}$$

$\square$

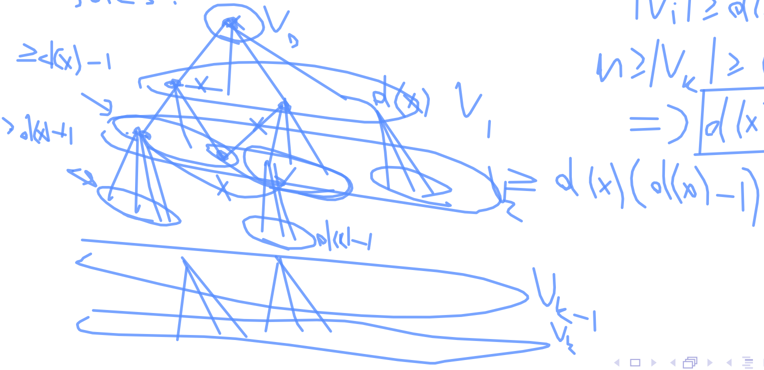
Tétel: G gráf n csúcson nem tartalmaz $C_3, C_4, C_5, \dots, C_{2k}$-t. Ekkor $e(G) \le n^{1+\frac{1}{k}} + n$.

Biz: Legyen x a legkisebb fokú csúcs.

$$|V_i| \ge d(x)\big(d(x)-1\big)^{i-1}$$

$$n \ge |V_k| \ge \big(d(x)-1\big)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x) \le n^{1/k}+1}$$



$d_{G_1}(x_1) \le n^{1/k} + 1$

$d_{G_2}(x_2) \le (n-1)^{1/k} + 1$

$d_{G_3}(x_3) \le (n-2)^{1/k} + 1$

$\vdots$

$$e(G) \le n^{1/k} + (n-1)^{1/k} + \dots + n$$

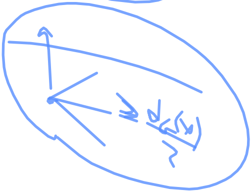
$$\le n \cdot n^{1/k} + n$$

$$= n^{1+\frac{1}{k}} + n$$

$\square$

Lemma: Minden G gráfnak létezik H részgráfja, mely páros és $d_H(x) \ge \frac{1}{2} d_G(x)$. Speciálisan $e(H) \ge \frac{1}{2} e(G)$.

Biz: Vegyük azt az (S,T) vágást, amire $e(S,T)$ maximális és legyen H (S,T) által megh. páros gráf.



Ha $x \in S$-re $d_S(x) > \frac{1}{2} d_G(x)$ akkor x-et áthelyezve T-be nőne az élek száma. $\Rightarrow d_H(x) \ge \frac{1}{2} d_G(x)$

Tétel: G d-reguláris gráf.
Ekkor tartalmaz olyan páros gráfot, melyre

$$\left| d_H(x) - \frac{d}{2} \right| \leq 10\sqrt{d \log d}$$

minden $x \in V(G)$-re.

Megj: Bizonyítás Lovász lokális lemmát használja (ez egy valószínűségi módszer).

Lemma (Minimális fokszám - átlag fokszám elv) Tegyük fel, hogy egy P gráftulajdonság olyan, hogy ha H gráfnak megvan a P tulajdonsága, akkor minden olyan G gráf is azon H-t feszített részgráfként tartalmaz (Példa: P(K) H tartalmaz egy K gráfot.)

Tfh az r számra teljesül, hogy ha egy n csúcsú gráfnak r a minimum foka, akkor P tulajdonságú. Tfh G nem P tulajdonságú és n csúcsa van. Ekkor legfeljebb $(r-1)n$ éle van. (Átlag fokszám $\leq 2(r-1)$.)

Biz

G nem P tulajdonságú

$\Longrightarrow$ van fok $d_{G_1}(x_1) \le r-1$.

Töröljük x_1-et.

$\Longrightarrow$ van fok $d_{G_2}(x_2) \le r-1$

Töröljük x_2-t.

$$e(G) < \underbrace{(r-1) + \dots (r-1)}_{n-1} \le n(r-1). \qquad \square$$

Tétel 1: G gráf n csúcson. Ha $e(G) > 100k\, n^{1+\frac{1}{k}}$ akkor

$C_{2\ell} \subseteq G$-ben minden $\ell \in \{k, k+1, \dots, k n^{1+\frac{1}{k}}\}$.

Tétel 2: G gráf n csúcson, $E = e(G)$.

Ha $\ell \le \frac{E}{100n}$ és $\ell n^{1/\ell} \le \frac{E}{10n}$, $\ell \ge 2$

akkor $C_{2\ell} \subseteq G$.

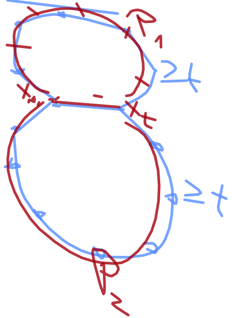
Tétel 2 $\Rightarrow$ Tétel 1 $\Rightarrow$ Bondy–Simonovits tétel.

Def (t-periódikus színezés)
G csúcsainak egy színezése t-periódikus ha minden t élű út végpontjai azonos színűek.

Példa.
(1) Minden csúcs azonos színű.
(2) t páros és páros gráfunk van.
Ekkor a páros gráf 2-színezése t-periódikus
(3) n csúcsunk van. Mindent különböző színűre színezünk, ez (n+1)-periódikus

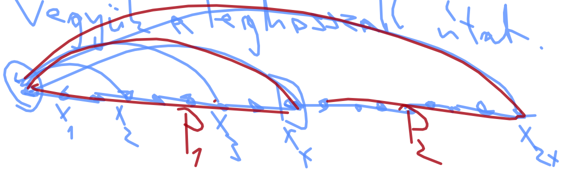
Lemma: Legyen G egy gráf, melyre $e(G) \geq 2t\,v(G)$ és G összefüggő. Ekkor egy t-periódikus színezés legfeljebb 2 színt használ.

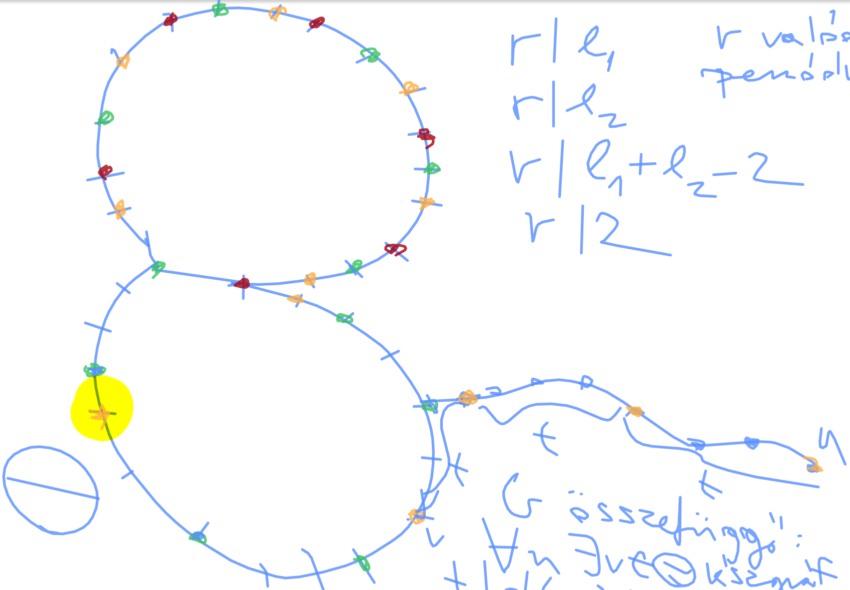
Biz:



Elég belátni ha a minimum fokszám az átlagfokszám fele, esetünkben $\geq 2t$.

Vegyük a leghosszabb utat.





$r \mid \ell_1$

$r \mid \ell_2$

$r \mid \ell_1 + \ell_2 - 2$

$r \mid 2$

r valódi periódus

G „összefüggő”:

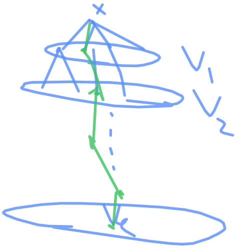
$\forall u\ \exists v \in \ominus$ kszgráf

$t \mid d(u,v) \Rightarrow c(u) = c(v)$

≤ 2 színt használtunk. $\square$

Lemma: G páros gráf, minimum fok $s \geq \max(5\ell n^{1/\ell}, 50\ell)$.
Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G$

Biz: Indirekt tfh $C_{2\ell} \not\subseteq G$



$V_i = \{u \mid d(u,x) = i\}$
Megmutatjuk, hogy $i \leq \ell$ esetén

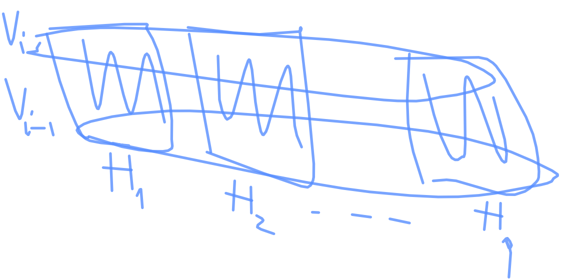
$$\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \geq \frac{s}{5\ell}$$

Ekkor $\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \geq \frac{s}{5\ell} \geq n^{1/\ell} \Rightarrow |V_\ell| \geq n$ ↯.

Megj: V_i-n belül nem megy él, mert G páros gráf.

$$\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \ge \frac{s}{5e}$$ bizonyítása indukcióval.

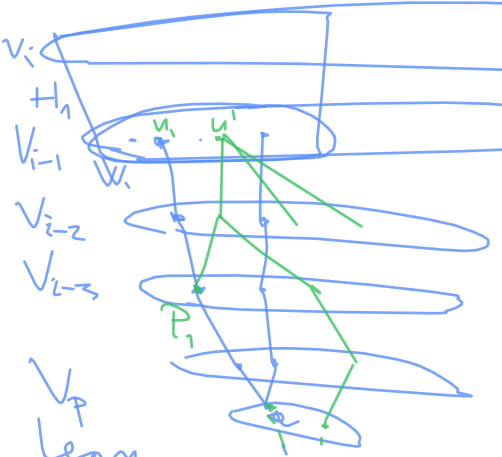
$$\frac{|V_1|}{|V_0|} = d(x) \underset{\text{min. fok}}{\ge} s \ge \frac{s}{5e}$$ indukció elindul.



$G[V_{i-1} \cup V_i] = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_q$

H_j: összefügg.

$$\boxed{\text{Áll: } e(H_j) \le 4\ell\, v(H_j)}$$



$e(H|_k) \leq 4\ell\, v(H|_k)$

$W_k = H_k \cap V_{i-1}$

1. eset: $|W_k| = 1$

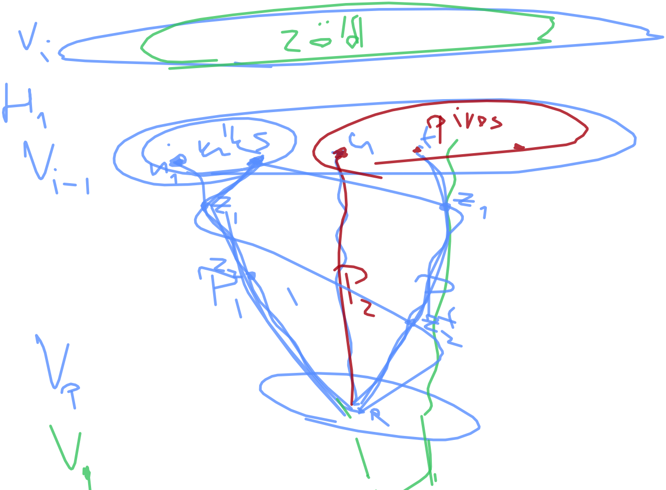
$W_k = \{u\}$ t

$t \leq 4\ell(t+1)$ ✓

2. eset: $|W_k| \geq 2$

Monoton út. olyan P út, hogy $|V_i \cap P| \leq 1$.

Legyen a csúcs olyan, hogy a-ból megy W_k-ba két út ami a-tól eltekintve diszjunkt és $a \in V_p$ ahol p min. ezen a tulajdonságúak közül.



Minden $u \in V_{i-1}$-nek van monoton útja a-ba

$u_1 \in W_1$ kék

Ha $u \neq u_1$

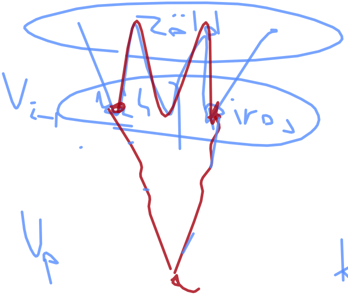
$\exists P_u$ mon. út a-ba mely diszj. P_1-től akkor az piros

Ha mind ilyen út akkor kék.

Áll: Ha s és t szinte különböző akkor

Van a-ba két monoton diszjunkt út s-ből és t-ből!

Áll: Ez a színezés $t=2(\ell-i+p+1)$ t-periodikus színezése H_1-nek



P t élű.

Ha zöldben indult zöldbe ér vissza

Probléma: ha kék és piros a híd végpontja.

Kör hossza: $t+2(i-1-p)=2\ell$

Mivel $C_{2\ell} \not\subseteq G$ ezért ilyen nem lehet.

Köv: $e(H_1) \overset{\text{Lemma}}{\le} 2t\, v(H_1) \le 4\ell\, v(H_1)$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e(H_i)}_{e(G[V_{i-1}\cup V_i])} \le 4\ell \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(H_i)}_{|V_{i-1}|+|V_i|}$$

$$e(G[V_{i-2}\cup V_{i-1}]) \le 4\ell(|V_{i-2}|+|V_{i-1}|)$$

$$e(G[V_{i-1}\cup V_i]) + e(G[V_{i-2}\cup V_{i-1}]) \underset{s \text{ min. fok}}{\ge} s|V_{i-1}|$$

$$\boxed{s|V_{i-1}| \le 4\ell(2|V_{i-1}|+|V_i|+|V_{i-2}|)}$$

$$4\ell|V_i| \ge (s-8\ell)|V_{i-1}| - 4\ell|V_{i-2}|$$

<u>Kell</u> $\dfrac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \ge \dfrac{s}{5\ell}$ $\qquad \dfrac{|V_{i-1}|}{|V_{i-2}|} \ge \dfrac{s}{5\ell}$ indukció!

$$4\ell|V_i| \geq (s-8\ell)|V_{i-1}| - \underbrace{\frac{20\ell^2}{s}}_{\leq \ell}|V_{i-1}|$$

$$s \geq 50\ell \Rightarrow \frac{20\ell^2}{s} \leq \ell$$

$$\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|} \geq \frac{s-9\ell}{4\ell} \overset{?}{\geq} \frac{s}{5\ell}$$

$$5(s-9\ell) \geq 4s$$

$$s \geq 45\ell$$

$\square$

Lemma: G páros gráf s min. fok, $s \ge \max(5\ell n^{1/\ell}, 50\ell)$. Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G$.

Tétel: Ha $E = e(G)$. Ekkor $C_{2\ell} \subseteq G$ ha $\ell \le \frac{E}{100n}$ és $\ell n^{1/\ell} \le \frac{E}{10n}$.

Biz: Tudjuk, hogy G-nek létezik H páros részgráfja, melyre $d_H(u) \ge \frac{1}{2} d_G(u)$.

1. eset: H min. foka $\ge \frac{E}{2n}$.

$s \ge \frac{E}{2n} \ge 50\ell$ $\quad s \ge \frac{E}{2n} \ge 5\ell n^{1/\ell}$ $\Rightarrow$ Lemma tlsz.

2. eset: H min. foka $< \frac{E}{2n}$.

$\Rightarrow$ G-ben min fok $< \frac{E}{n}$.

Dobjuk el a min fokú x csúcsot. Kapott gráf G_{n-1}.

$$|E(G_{n-1})| \geq |E| - \frac{|E|}{n} \geq \frac{n-1}{n}|E| \geq 100(n-1)\ell$$
$$\geq 10(n-1)\ell n^{1/\ell}$$
$$\geq 10(n-1)\ell(n-1)^{1/\ell}$$

$\Longrightarrow$ G_{n-1} teljesíti a feltételt:

$$\frac{|E(G_{n-1})|}{100(n-1)} \geq \ell \qquad \frac{|E(G_{n-1})|}{10(n-1)} \geq \ell(n-1)^{1/\ell}$$

$\Longrightarrow$ $C_{2\ell} \subseteq G_{n-1} \subseteq G$.

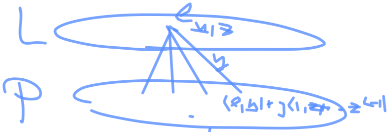
$\square$

Tétel (Bondy–Simonovits)

Ha G n csúcsú gráf, $C_{2k} \not\subseteq G$.

Akkor $e(G) \le 100k\, n^{1+\frac{1}{k}}$.

Konstrukció $k=2,3,5$-re.



$\mathbb{F}_q$ véges test.

$P = \mathbb{F}_q^k$

$$\ell_{u,z} = \{(0,u)+y(1,z,z^2,\dots,z^{k-1}) \mid y\in\mathbb{F}_q\}$$ "egyenes" $u\in \mathbb{F}_q^{k-1}$, $z\in\mathbb{F}_q$

$|\ell_{u,z}| = q$

Minden $\ell_{u,z}\in L$ egyenest összekötjük a pontjaival

Csúcsok száma $2q^k$

Élek száma q^{k+1}.

Legyen ez a gráf $D_k(q)$.

Áll: (a) $C_4 \notin D_2(q)$

(b) $C_4, C_6 \notin D_3(q)$

(c) $C_4, C_6, C_{10} \notin D_5(q)$.

Biz: $p_1 e_1 p_2 e_2 \dots p_r e_r (p_1)$ $2r$ hosszú kör $r \leq k$

$p_i = (0, u_{i-1}) + y_{i-1}(1, z_{i-1}, z_{i-1}^2, \dots) \in \ell_{u_{i-1}, z_i}$

$= (0, u_i) + y_i'(1, z_i, z_i^2, z_i^3, \dots)$

$$p_{i+1} = (0, \underline{u}_i) + y_i(1, z_i, z_i^2 \quad -)$$

<u>Észrevétel</u>: $z_i \neq z_{i-1}$.

Mert p_i első koordinátája $y_{i-1} = y_i'$

Ha $z_i = z_{i-1} \Rightarrow u_{i-1} = u_i \Rightarrow \ell_{u_{i-1}, z_{i-1}} = \ell_{u_i, z_i}$ $\lightning$

<u>Észrevétel</u>: $\forall i$-re $\exists j \neq i$ $z_j = z_i$.

$$p_{i+1} - p_i = (y_i - y_i')(1, z_i, z_i^2, \dots, z_i^{k-1})$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} (p_{i+1} - p_i) = \sum_{i=1}^{r} (\underset{\neq}{y_i - y_i'})(1, z_i, z_i^2, \dots, z_i^{k-1})$$

$p_{r+1} = p_1$ $\quad$ $p_i \neq p_{i+1}$

Ha $0 = \sum_{s=1}^{t} c_s (1, z_s, \dots, z_s^{k-1})$ ahol z_s-k kül.

$\Longrightarrow \forall c_s = 0$.

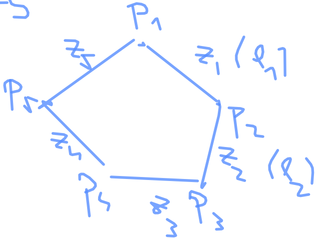
$$\det\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{k-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & z_k & \dots & z_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (z_j - z_i) \neq 0 \quad \text{ha kül.}$$

$\Leftarrow$ lin. függetlenek

Ha $\underline{0} = \sum (y_i - y_i')(1, z_i, z_i^2, \dots, z_i^{k-1})$ $i \neq j$

akkor $\forall z_i$-hez ≥ 2-szer kell szerepelnie.

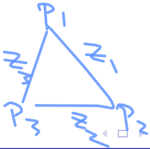
$r=5$



$z_i \neq z_{i+1}$

$\forall i \, \exists j \;\; z_i = z_j$

Nem lehet ha $r=5$



$r = 2, 3$ sem lehet. $\square$

Schwartz–Zippel lemma

Tétel: Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test és $S \subseteq \mathbb{F}$. Legyen $p(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ egy d-edfokú polinom $\mathbb{F}$ felett. Legyen

$$T = \{ (s_1 \dots, s_n) \in S^n \mid p(s_1, \dots, s_n) = 0 \}$$

Ekkor $|T| \leq d\,|S|^{n-1}$

Megj: Kicsit másképp

$$\mathbb{P}_{s_1 \dots s_n}\big(p(s_1, \dots, s_n) = 0\big) \leq \frac{d}{|S|}$$

Biz:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{k} p_j(x_1 \dots x_{n-1})\, x_n^j$$

Indukció: $n = 1$

◁ □ ▷ ◁ ⧉ ▷ ◁ ≣ ▷ ◁ ≣ ▷ ≣ ↶ 🔍 ↷

d-edfokú polinomnak $\le d$ gyöke van. Ez igaz $n+1 > n$

$$S_0 = \{(s_1, \dots, s_{n-1}) \mid P_k(s_1, \dots, s_{n-1}) = 0\}$$
$$S_1 = \{(s_1, \dots, s_{n-1}) \mid P_k(s_1, \dots, s_{n-1}) \neq 0\}$$

$\deg P_k \le d-k$, mert $P_k x_n^k$ foka $\le d$.

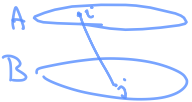
Indukcióból: $|S_0| \le (d-k)|S|^{n-2}$

$$|T| \le |S_0| \cdot |S| + |S_1| \cdot k \le (d-k)|S|^{n-2} \cdot |S| + |S|^{n-1} \cdot k = d|S|^{n-1}$$

tényleg k-adfokú ha rögzítem $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in S_1$ akkor s_n csak k féle lehet.

$\square$

Alkalmazás: Páros gráfban van-e teljes párosítás.



$|A| = |B| = n$

$$X_G = \begin{array}{cc} & \qquad j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ & X_{ij} & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P((x_{ij})_{ij\in E}) = \det(X_G)$$

Ha nincs teljes párosítás $\to \det(X_G) = 0$.

Ha van teljes párosítás $\to \det(X_G) \neq 0$.

$|S| = 4n$

$$\mathbb{P}_{(s_{ij})}\left(\det((s_{ij})_{ij\in E}) = 0\right) \le \frac{n}{|S|}$$

Ha nem 0 $\det((s_{ij})_{ij\in E})$ akkor biztos, hogy van teljes párosítás.

Ha 0, akkor $\le \frac{1}{4}$ esélye, hogy tévedtünk

(Iteráljuk 100-szor $\frac{1}{4^{100}}$.)

Javaslat: $S = \mathbb{F}_q$ ahol $q > 4n$.

Gauss elimináció során nem lesz sem törtek, sem nagy számok.

<u>Megj.</u> A, B $n \times n$ mátrixok

AB n^3 szorzás, összeadás.

$AB = C$ Mennyi lépés kell az ellenőrzéshez.

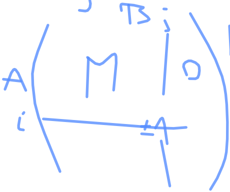
Random $\underline{x}$ vektor

$C\underline{x}$ n^2 lépés $\quad A(B\underline{x})$ $2n^2$ lépés

Teljes párosítások száma

<u>Cél</u>: síkgráfok esetén ezt megoldani polinomiálisan időben. (Mi: feltesszük azt is, hogy páros gráfunk van.)

$|A|=|B|=n$



$M_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \in E \\ 0 & ij \notin M \end{cases}$

$$\det(M) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

$$\operatorname{Per}(M) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} M_{i,\pi(i)}$$

$\operatorname{Per}(M)$ Permanens, esetünkben éppen a teljes párosítások száma.

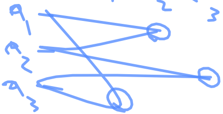
<u>Állítás</u>: Előjeleket betenni M-be úgy, hogy a kapott M^s mátrixra $\det(M^s) = \operatorname{Per}(M)$.

Jó hír: síkgráfokon ez alem működik.

Mi kell nekünk?

s_{ij} előjel

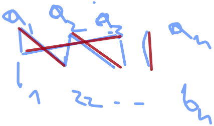
$\mathrm{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} s_{i,\pi(i)}$ legyen mindig azonos előjelű.

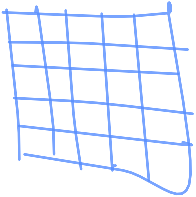


π ciklus felbontásban

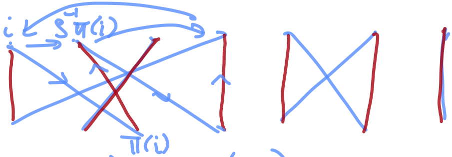
páratlan kör +1 $\Rightarrow$ eredetiben $4k+2$ hosszú kör

páros kör −1. $\Rightarrow$ eredetiben $4k$ hosszú kör.





$$\mathrm{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n} s_{i,\pi(i)} \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} s_{i,\sigma(i)}$$



$\mathrm{sgn}(\pi)\,\mathrm{sgn}(\varsigma) = \mathrm{sgn}(\pi\varsigma^{-1})$

kék + piros = páros hosszú körök + dupla élek

$2r$ hosszú kör $\Longleftrightarrow$ $\varsigma^{-1}\pi$ r-hosszú kör

$\prod s_{i,\pi(i)} \prod s_{i,\varsigma(i)}$

$\boxed{\begin{array}{ll} 4r \text{ hosszú körön (a gráfban)} & \text{páratlan} - 1 \\ 4r+2 \text{ hosszú kör} & \text{páros} - 1 \end{array}}$

Def: C kör egyenletesen elhelyezett ha $G \setminus C$-ben van teljes párosítás.

Ha s olyan előjelezés, hogy minden egyidejűleg elhelyezett $2r$ hosszú körön a (-1)-esek száma $(r-1)$-gyel kongruens modulo 2, akkor

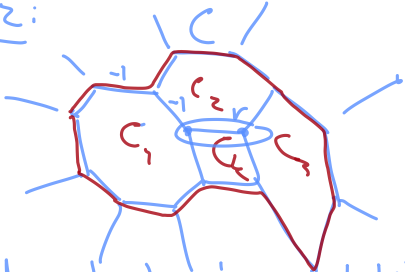
$$|\det(M^s)| = \mathrm{per}(M).$$

(Ilyen előjelezést Kasteleyn előjelezésnek hívják.)

<u>Megj:</u> $K_{3,3}$-nak nincs ilyen előjelezése.

Áll: Ha egy páros síkgráf tartományait határoló körökre igaz a feltétel (-1-esek száma $(r-1)$-gyel kong. mod 2), akkor minden egyenletesen elhelyezett körre.

Biz:



Legyen $n(C_i)$ a C_i körül a (-1)-esek száma.

$|C_i| = 2\ell_i$

Feltétel: $\ell_i - 1 \equiv n(C_i)$ (2)

$$n(C) \equiv \sum n(C_i) \quad (2)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{k} (\ell_i - 1)$$

Tfh r darab csúcs van belül. Legyen $|C| = 2\ell$.

$\underbrace{2\ell + r}_{\text{csúcsok}}$

$k+1$ lap

Élek $2\ell + \frac{1}{2}\left(\sum 2\ell_i - 2\ell\right) = \sum_{i=1}^{k} \ell_i + \ell$

$$\sum_{i=1}^{k} l_i + l + 2 = \underbrace{2l + r}_{\text{csúcsok}} + \underbrace{k+1}_{\text{lapok}}$$ Euler

$$\sum_{i=1}^{k} (l_i - 1) = l + r - 1$$

$$n(C) \equiv \sum n(C_i)$$

$$n(C) \equiv l + r - 1 \quad (2)$$

C egyenletesen elhelyezett $\Rightarrow$

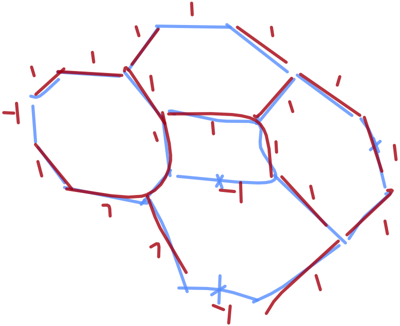
$G \setminus C$ van teljes párosítás $\Rightarrow$ r páros

$$\Rightarrow n(C) \equiv l - 1 \quad (2)$$

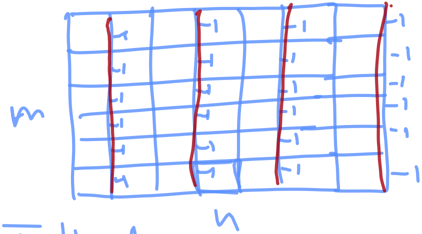
$\square$

Áll: Páros Síkgráfokra van jó előjelezés

Biz:



Indukció: töröljünk egy külső élet, maradékot előjelezzük jó, majd az élet előjelezzük megfelelően

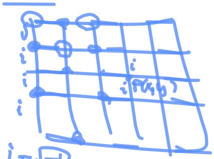


$n \times m$-es rács.

Hány teljes párosítás van benne?

Tétel: Teljes párosítások száma

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\left(4\cos^2\frac{j\pi}{n+1}+4\cos^2\frac{k\pi}{m+1}\right)\right)^{1/4}.$$



$i=\sqrt{-1}$

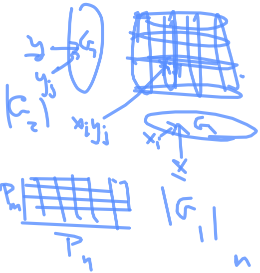
$i\,|\quad |i \leftrightarrow$

$M = \Big(\quad \Big)$

$$A^s = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M^s \\ \hline M^{sT} & 0 \end{array}\right) \qquad \det(A^s) = \det(M^s)^2$$

$$\lambda f(x,y) = f(x-1,y) + f(x+1,y) + i f(x,y-1) + i f(x,y+1)$$

Ekkor $f(x,y)$ sajátvektor λ-hoz.



$$\lambda_{G_1} x_i = \sum_{k \in N_{G_1}(i)} x_k$$

$$\lambda_{G_2} y_j = \sum_{r \in N_{G_2}(j)} y_r$$

$$\sum_{r \in N_{G_2}(j)} x_i y_r + \sum_{k \in N_{G_1}(i)} y_j x_k = x_i(\lambda_{G_2} y_j) + y_j(\lambda_{G_1} x_i) = (\lambda_{G_1} + \lambda_{G_2}) x_i y_j$$

n csúcsú út.

Kine P_n sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow$ P_m sajátértékei $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$

Kreniink $\lambda_k + i\mu_j$.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & n & n+1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ & & & & & \| \\ & & & & & 0 \end{array}$$

$$\lambda x_i = x_{i-1} + x_{i+1} \qquad 1 \le i \le n$$

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \gamma^{n+1} \end{matrix}} & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \dots & \gamma^n & \gamma^{n+1} \\ & \gamma^n & & \dots & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{array}$$

$$\lambda \gamma = 1 + \gamma^2$$

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} + \gamma$$

$$1 + \gamma^{n+1} = 0 \qquad \gamma = e^{\frac{\pi i}{n+1}(2k+1)} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{n+1}\right) \longleftrightarrow \boxed{2\cos\frac{\pi k}{n+1}} \quad k = 1, \dots, n$$

Összefoglalva: P_n sajátértékei $2\cos\frac{\pi k}{n+1}$ $k = 1, \dots, n$

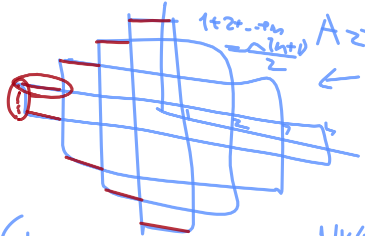
$$\boxed{\lambda = 2\cos\frac{\pi k}{n+1} + i\, 2\cos\frac{\pi \ell}{m+1}} \qquad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ \ell = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\det(A^s) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{m} \left(2\cos\frac{\pi k}{n+1} + i\, 2\cos\frac{\pi \ell}{m+1} \right)$$

$$|\det(A^s)| = \left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m}\left(4\cos^2\frac{\pi k}{n+1} + 4\cos^2\frac{\pi \ell}{m+1}\right)\right)^{1/2}$$

$$\| \qquad |\det(M^s)|^2$$

$$\underline{\text{teljes pár. száma}} = |\det(M^s)| = \left|\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m}\left(4\cos^2\frac{\pi k}{n+1} + 4\cos^2\frac{\pi \ell}{m+1}\right)\right|^{1/4}$$



Aztéc gyémánt $\leftarrow A(4)$

teljes párosítások száma $= 2^{n(n+1)/2}$.

$$(\text{teljes pár. szám})^{1/v(G_n)} = \left(2^{n(n+1)/2}\right)^{\frac{1}{4\left|\frac{n(n+1)}{2}\right|}} = 2^{1/4}$$

$$\frac{1}{4}\log 2 = 0.17\dots$$

$$\log\left(n \cdot m \text{ rácn}\right)^{\frac{1}{4n}} =$$